

Offener Mathematikunterricht in der Grundschule - vom FACH aus

Erich Ch. Wittmann

(erschienen in Grundschulunterricht 43 (1996), S.3-7)

Im vorliegenden Beitrag wird der Versuch unternommen, das in den letzten Jahren viel diskutierte Konzept des „offenen“ Unterrichts auf eine breitere Grundlage zu stellen.

Die Diskussion über Erziehung, Unterricht und Lehrerbildung über die Schulstufen hinweg leidet m.E. ganz allgemein unter einer historischen Spaltung, die trotz vieler Bemühungen bis heute noch nicht überwunden ist und sich auch deutlich in der Diskussion über „offenen“ Unterricht zeigt: Auf der einen Seite steht das Modell der gymnasialen Lehrerbildung, in der fast nur die Fächer zählen und erziehungswissenschaftliche Aspekte des Unterrichts abgewertet, ja z.T. verächtlich gemacht werden, als wenn fachwissenschaftliche Theorien die einzige relevante wissenschaftliche Grundlage des Lehrberufs seien. Im Gegensatz dazu dreht sich in der Grundschullehrerausbildung, die in der Tradition der Volksschule steht, fast alles um Pädagogik, Psychologie usw. Fachliche Anforderungen werden hier einerseits trivialisiert und andererseits, sobald sie über ein bestimmtes Niveau hinausgehen, verteufelt, als wenn die Unterrichtstätigkeit überhaupt keine fachlichen, sondern nur erziehungswissenschaftliche oder allenfalls noch methodische Anforderungen stellen würde.

Bis in die sechziger Jahre hinein haben diese beiden Auffassungen wie getrennte Welten nebeneinander her existiert. Dann stellten gesellschaftliche Veränderungen die scharfe Trennung in Frage und regten Ansätze zu ihrer Überwindung an. Anfang der siebziger Jahre wurde klar erkannt, dass die beiden konkurrierenden Auffassungen auf ein fundamentales strukturelles Problem des Lehrberufs zeigen. Im Gegensatz zu anderen Berufen gibt es für den Lehrer nicht eine einzige Berufswissenschaft, wie die Rechtswissenschaft für den Juristen und die Medizin für den Arzt. Vielmehr ist die Wissenschaft auf zwei grundsätzlich verschiedene Weisen mit der Berufstätigkeit von Lehrern verbunden: Einerseits bilden wissenschaftliche Inhalte und Methoden den Gegenstand des Unterrichts, andererseits müssen die Bedingungen und Formen der Vermittlung wissenschaftlich begründet werden.

Ende der sechziger Jahre wurde deutlich, dass dieses strukturelle Problem weder von den Fachwissenschaften noch von den Erziehungswissenschaften alleine zu lösen war. Geradezu zwangsläufig etablierte sich daher die Fachdidaktik als „Berufswissenschaft“ der Lehrer mit dem Ziel, das Problem in einem interdisziplinären Ansatz in Angriff zu nehmen.

Es ist keine Frage, dass die Fachdidaktik seit dieser Zeit große Fortschritte erzielt hat. Von einer wirklichen Integration fachwissenschaftlicher und erziehungswissenschaftlicher Aspekte zu einem schlüssigen Konzept, das von der Grundschule bis in die Oberstufe reicht und im System von Schule, Schulverwaltung und Lehrerbildung getragen wird, sind wir allerdings weit entfernt. Die unterschiedlichen Traditionen wirken hier noch stark nach, auch wenn inzwischen die Fächer, die Fachdidaktiken und die Erziehungswissenschaften gesetzlich in der Lehrerausbildung aller Stufen verankert sind und das Verständnis für interdisziplinäre Zugänge gewachsen ist.

Was die Grundschule anbelangt, gibt es eine ganze Reihe von Indizien dafür, dass das Bewusstsein von Lehrern und Lehrerstudenten noch immer wesentlich pädagogisch geprägt ist:

- Auch heute noch möchten viele Grundschulstudentinnen am liebsten keine Mathematik studieren. Sie sind überzeugt davon, dass sie auf dem Gymnasium bereits mehr Mathematik gelernt haben, als sie in der Grundschule „brauchen“, und dass sie nur noch lernen müssten, wie man z.B. das kleine Einmaleins unterrichtet (das, nebenbei bemerkt, immer weniger von ihnen beherrschen.)
- Namhafte Grundschulpädagoginnen und -pädagogen fordern gerade in letzter Zeit mit allem Nachdruck, dass das „Kind“ in den Mittelpunkt aller Überlegungen zu Schule und Unterricht gehöre und die Pädagogik (natürlich!) wieder zur „Mitte“ der Grundschullehrerausbildung werden müsse.
- Bei Grundschultagungen und -kongressen sind die Hauptvorträge eine selbstverständliche Domäne der Pädagogik, und die weitaus überwiegende Zahl von Referaten befasst sich mit pädagogischen Themen. Offenbar ist es für die meisten Veranstalter ein völlig abwegiger Gedanke, für einen Hauptvortrag an einen Fachdidaktiker oder gar Fachwissenschaftler heranzutreten. Anschei-

nend wird von diesen Gruppen nichts für die heutige Grundschule wirklich Bedeutsames erwartet.

- Auch die im Bereich der Grundschule arbeitenden Fachdidaktiker sind, meist aufgrund ihres wissenschaftlichen Hintergrundes, sehr stark pädagogisch geprägt, wie es auch der Tradition entspricht.

Es wäre natürlich blauäugig zu übersehen, dass dieser starke Drang zur Pädagogik auch eine Gegenreaktion auf die Entwicklung der Grundschule in den siebziger Jahren ist. 1970 hatte der Deutsche Bildungsrat (unter kräftiger Mitwirkung namhafter Pädagogen und Psychologen!) in seinem Strukturplan auch für die Grundschule das „Prinzip der Wissenschaftlichkeit“ gefordert. Ansätze in dieser Richtung sind bekanntlich kläglich gescheitert, insbesondere auch im Bereich von Mathematik und Naturwissenschaften (Stichwort „Mengenlehre“). Dies ist von vielen Grundschulpädagogen als klarer Beweis gegen die „Wissenschaftsorientierung“ und für die Notwendigkeit einer „Kindorientierung“ verstanden worden.

Für eine Integration fachwissenschaftlicher und erziehungswissenschaftlicher Aspekte: „Die Position von *John Dewey*“

Wenn man die Fakten der siebziger Jahre genauer analysiert, zeigt sich jedoch, dass nur gewisse Ansätze zur „Wissenschaftsorientierung“ gescheitert sind. Die Möglichkeit, von anderen Wissenschaftsauffassungen her kindgemäße Formen des Lehrens und Lernens zu entwickeln, bleibt damit offen. Es ist das Verdienst eines Pädagogen, diesen Weg in aller Klarheit aufgezeigt zu haben. *John Dewey* (1859 - 1952), der große amerikanische Bildungsphilosoph und Reformpädagoge, dessen Bedeutung auch bei uns immer mehr erkannt wird, hat sich in seinem Aufsatz „The Child and the Curriculum“ (*Dewey* 1902/1976) bereits am Anfang des Jahrhunderts von einem grundsätzlichen Standpunkt aus mit dem Gegensatz „Kindorientierung“/ „Wissenschaftsorientierung“ befasst und ist zu Schlüssen gekommen, an die wir heute nahtlos anknüpfen können. Ich möchte diesen Aufsatz, der im deutschen Sprachraum so gut wie unbekannt ist, im folgenden kurz referieren (übers. durchweg E.Ch.W.).

Dewey beschreibt zu Beginn die beiden Standpunkte zu Erziehung und Unterricht, die einseitig entweder auf das „Kind“ bzw. auf das „Fach“ setzen. Dann zeigt er de-

ren Einseitigkeit auf und bezeichnet es als „das Wesen des pädagogischen Prozesses“, einen Ausgleich zwischen den nur scheinbar gegensätzlichen Faktoren „Kind“ und „Fach“ herzustellen. Den Schlüssel zur Integration sieht er in einem bestimmten Verständnis des Faches:

„Was also ist das eigentliche Problem bei der Frage „Kindorientierung versus Wissenschaftsorientierung“? Man muss zuerst die vorgefasste Ansicht aufgeben, dass eine prinzipielle Kluft zwischen der kindlichen Entwicklung und den Ordnungsprinzipien der Fachinhalte bestehe. Vom Kind aus betrachtet kommt es darauf an zu sehen, wie seine Erfahrung bereits Elemente in sich trägt, die auf das Fach verweisen, und, was von noch größerer Bedeutung ist, welche Einstellungen, Motive und Interessen es hat, die ähnlich bei der Entwicklung des Faches und bei der Umarbeitung des Stoffes in seine heutige Form am Werk gewesen sind. Vom Fach aus betrachtet kommt es darauf an, Anknüpfungspunkte zur kindlichen Entwicklung zu finden. Wir sollten weder den Stoff als fest und fertig und außerhalb der kindlichen Erfahrungswelt stehend betrachten, noch die kindliche Entwicklung als starr und unbeeinflussbar ansehen. Das Kind und die Fachinhalte sind vielmehr Pole, die einen einzigen Prozess definieren. Ebenso wie zwei Punkte eine Strecke festlegen, so bestimmen der gegenwärtige Entwicklungsstand des Kindes und die objektiven Gegebenheiten eines Faches zusammengenommen den Unterricht. Es ist eine **fortgesetzte** Rekonstruktion, die sich von der gegenwärtigen kindlichen Erfahrung aus zu dem strukturierten Wissensbestand eines Faches bewegt“ (S. 277- 278).

Dewey nimmt hier also eine **genetische Position** ein: Er fordert dazu auf, die Entwicklungsfähigkeit des Kindes mit der Entwickelbarkeit des Faches in Einklang zu bringen, und kritisiert von daher die jeweils ausschließliche Orientierung am „Logischen“ und am „Psychologischen“:

Das Ergebnis unserer Überlegungen können wir folgendermaßen zusammenfassen: Wenn die „alte Erziehung“ dazu neigte, die dynamische Seite, d.h. die der gegenwärtigen Erfahrung des Kindes innewohnende Kraft, unbeachtet zu lassen und anzunehmen, Führung und Kontrolle bedeute nichts anderes, als das Kind willkürlich auf einen gegebenen Pfad zu setzen und es zu zwingen, ihn zu benutzen, ist die „progressive Pädagogik“ in Gefahr, den Entwicklungsgedanken in einer ganz und gar formalen und leeren Weise zu verstehen. „Progressive Pädagogen“ erwarten vom Kind, dass es Erkenntnisse aus seinem eigenen Geiste heraus „entwickelt“, dass es sich Dinge ausdenkt oder für sich ausarbeitet, ohne „fachliche Rahmenbedingungen“ zu benötigen. Aus dem Nichts kann aber nichts entwickelt werden.

Entwicklung heißt nicht, dass dem kindlichen Geist **irgendetwas** entspringt, sondern, dass **substanzielle Fortschritte** gemacht werden, und das ist nur möglich, wenn eine **geeignete Lernumgebung** zur Verfügung steht. Die Kinder müssen zwar von sich aus arbeiten, aber wie sie arbeiten, wird fast ganz von der Lernumgebung und dem Stoff, an dem sie sich üben, abhängen. Das Problem der Richtungsgebung ist so das Problem, geeignete Anregungen für das Kind auszuwählen, die bei der Gewinnung der neuen Erfahrung wirksam werden sollen. Es ist unmöglich zu sagen, welche neuen Erfahrungen wünschenswert und welche notwendig sind, wenn man die Entwicklungsrichtung nicht kennt (S. 282-283).

Um die Bedeutung des „Faches“ für das kindliche Lernen zu verdeutlichen, vergleicht Dewey den Unterschied zwischen dem „Psychologischen“ und dem „Logischen“ mit dem Unterschied zwischen den Aufzeichnungen eines Forschers bei der Erschließung eines neuen Landes und der fertigen Karte, die nach der Erforschung angefertigt wurde:

„Welchen Nutzen hat eine solche Darstellung der Erkenntnis? Welchen Nutzen hat die Karte? Wir können zuerst sagen, was die Karte nicht ist. Die Karte ist kein Ersatz für die persönliche Erfahrung. Die Karte tritt nicht an die Stelle einer tatsächlichen Reise. Das logisch geordnete Material einer Wissenschaft oder eines Fachgebietes ist kein Ersatz für individuelle Erfahrungen. Die mathematische Formel für einen frei fallenden Körper kann nicht den persönlichen Kontakt und die unmittelbare persönliche Erfahrung mit dem fallenden Gegenstand ersetzen. Aber die Karte als Zusammenfassung, als geordnete und methodische Sichtung früherer Erfahrungen, dient als Führer für zukünftige Unternehmungen; sie gibt Richtung, sie erleichtert die Kontrolle; sie schont die Kräfte und erspart nutzloses Wandern, indem sie die Pfade zeigt, die am schnellsten und sichersten zu einem gewünschten Ergebnis führen. Durch die Karte kann jeder neue Reisende für seine eigene Reise den Nutzen aus den Ergebnissen der Forschungen anderer ziehen. Wenn ihm nicht die Hilfe objektiver und auf einen bestimmten Standard gebrachter Berichte der früheren Forschungen zur Verfügung stünde, müsste er den früher notwendigen Energie- und Zeitaufwand erneut erbringen. Das, was wir eine Wissenschaft oder ein Fach nennen, bringt das Nettoergebnis der vergangenen Erfahrung in eine für die Zukunft am leichtesten zugängliche Form. Sie stellt ein Kapital dar, das sofort Zinsen trägt. Sie hält mit der geistigen Arbeit in jeder Weise haus. Das Gedächtnis wird weniger belastet, weil die Erkenntnisse um ein gemeinsames Prinzip gruppiert werden, anstatt isoliert an die wechselnden Umstände der ursprünglichen Entdeckungen gebunden zu sein. Die Wahrnehmung wird unterstützt; wir wissen, wonach und wo wir zu suchen haben. Es ist der Unterschied zwischen der Suche nach einer Nadel in einem Heuhaufen und

der Suche nach einem bestimmten Papier in einem wohlgeordneten Arbeitszimmer. Anstatt sich von einer zufälligen Assoziation zur anderen zu bewegen, erhält das Denken eine Richtung, da es bestimmte allgemein benutzte Wege gibt, denen die Überlegungen natürlicherweise folgen können (S. 284).

Zum Schluss formuliert *Dewey* unterschiedliche Aspekte des Faches für die Wissenschaft und den Unterricht:

„Somit ergibt sich die Notwendigkeit, die Inhalte der Fächer oder Wissenszweige wieder zum Erkenntnisprozess in Verbindung zu setzen, sie wieder zu den ursprünglichen Erkenntnissen zurückzuführen, von denen sie abstrahiert worden sind. Es ist nötig, sie zu psychologisieren und auf die unmittelbaren, individuellen Erfahrungen zu beziehen, aus denen sie gewonnen und mit Sinn erfüllt worden sind.

So hat jedes Fach zwei Seiten: eine für den Wissenschaftler und eine für den Lehrer. Diese zwei Seiten sind einander keineswegs entgegengesetzt und auch nicht unverträglich. Aber sie sind auch nicht identisch. Für den Wissenschaftler stellt der Stoff einfach einen gegebenen Bestand wissenschaftlicher Erkenntnisse dar, der bei der Bearbeitung neuer Probleme und der Gewinnung neuer Ergebnisse anzuwenden ist. Für ihn trägt die Wissenschaft ihren Sinn in sich selbst. Der Wissenschaftler bezieht verschiedene bekannte Forschungsergebnisse aufeinander und verbindet sie mit neuen Erkenntnissen. Es wird von ihm als Wissenschaftler nicht verlangt, dass er sich außerhalb seiner Fachkompetenz bewegen soll. Das Problem des Lehrers ist dagegen von ganz anderer Art. Als Lehrer ist es nicht seine Aufgabe, neue wissenschaftliche Erkenntnisse zu finden oder zu begründen. Er befasst sich mit dem Erkenntnisbestand der Wissenschaft als einem gegebenen Zustand und Abschnitt im Prozess der menschlichen Erkenntnis. Die Aufgabe des Lehrers besteht darin, Kindern eine lebendige und persönliche Begegnung mit dem Stoff zu ermöglichen. Für ihn sind daher in erster Linie die Wege wichtig, wie das Fach in die kindliche Erfahrungswelt integriert werden kann. Der Lehrer muss wissen, wie sein Fachwissen bei der Interpretation der Bedürfnisse und Aktivitäten des Kindes helfen kann und wie Lernsituationen für die zweckmäßige Förderung des Kindes herzustellen sind. Den Lehrer interessiert der Stoff somit nicht als solcher, sondern nur als Faktor in einem umfassenden Entwicklungsprozess. Den Stoff in dieser Weise sehen heißt, ihn psychologisieren“ (S. 285-286).

Mathematik und MATHEMATIK

Für die Mathematikdidaktik lässt sich positiv vermerken, dass die von *John Dewey* geforderte genetische Sichtweise des Faches in der Mathematikdidaktik seit Anfang

der siebziger Jahre immer stärker in den Vordergrund dringt und dabei von neuen Erkenntnissen in der Wissenschaftstheorie und Philosophie der Mathematik gestützt wird. Wesentliche Impulse sind dabei von *Hans Freudenthal* und der von ihm begründeten Utrechter Schule, von englischen Didaktikern innerhalb der einflussreichen Association of Teachers of Mathematics und in Deutschland von *Heinrich Winter* ausgegangen (Wittmann 1995, 12-14).

Das Fach Mathematik erscheint dabei in folgendem Licht:

1. Mathematik ist ursprünglich und in erster Linie eine **Aktivität**. Mathematische Strukturen sind das (jeweils vorläufige) Ergebnis von Problemlöse- und Umarbeitungsprozessen. Sie werden am besten verstanden, wenn der Lerner sie innerhalb des vom Lehrer geschaffenen Rahmens rekonstruiert („nacherfindet“).
2. Mathematische Aktivitäten hängen vom **sozialen Austausch** ab. Erkenntnis-, Lern- und Anwendungsprozesse sind soziale Prozesse. Was z.B. ein Beweis ist, lässt sich nicht absolut entscheiden, sondern wird in der Gruppe der Mathematiker ausgehandelt.
3. Je nach sozialem Kontext besteht ein unterschiedliches Verständnis von der Natur der Mathematik, von Beweisen, von Darstellungsformen sowie ein unterschiedlicher Sprachgebrauch.

Um zum Ausdruck zu bringen, dass die Mathematik ein umfassendes gesellschaftliches Phänomen ist, das sich aus vielen Quellen speist, eine Fülle von Bezügen zu Naturwissenschaft, Technik, Wirtschaft, Kunst und Lebenspraxis aufweist und von der spezialisierten Universitätsmathematik auch nicht annähernd repräsentiert wird, schlage ich vor, Mathematik in diesem breiten Verständnis mit Großbuchstaben zu schreiben: MATHEMATIK (gesprochen: „Mathematik großgeschrieben“ oder kurz „große Mathematik“). Die spezialisierte Mathematik gehört selbstverständlich zur MATHEMATIK, sogar als ganz wesentliche Komponente. Es wäre aber verfehlt, ihre Besonderheiten, insbesondere den systematisch-deduktiven Aufbau der fertigen Theorien aus Grundbegriffen und Axiomen, zum Maßstab für das Ganze zu nehmen

und sie zur Zensur von Aktivitäten in anderen sozialen Bereichen, insbesondere auch im Unterricht, heranzuziehen.

Offener Unterricht - von der MATHEMATIK aus

Angesichts der Dominanz der Pädagogik in der Diskussion über die Grundschule ist es kein Wunder, dass das Konzept des „offenen“ Unterrichts bisher fast ausschließlich als pädagogisches Konzept diskutiert worden ist, wie *Jörg Voigt* in seinem einleitenden Referat zur Grevenbroicher Tagung deutlich aufgezeigt hat. Die „Öffnung“ des Unterrichts wird als „Offenheit der Lernformen“, als „Offenheit zu den Kindern und zwischen den Kindern“ sowie als „Offenheit zum Leben“ beschrieben und durch Veränderungen bei den Kindern und ihren Lebensbedingungen begründet. Meine These im Anschluss an *John Dewey* ist, dass die „Öffnung“ des Unterrichts mindestens ebenso nachdrücklich vom FACH aus gefordert werden muss, das ja in seinem innersten Wesen von offenen Prozessen bestimmt wird:

Innerhalb fachlicher Rahmungen, die von den untersten Lernstufen aus „mitwachsen“ können, lassen sich Problemstellungen und Aufgaben unterschiedlichster Schwierigkeitsgrade formulieren. Diese können von unterschiedlichen Voraussetzungen aus, mit verschiedenen Mitteln, auf unterschiedlichem Niveau und verschieden weit bearbeitet werden. So entsteht auf ganz natürliche Weise Spielraum für Eigeninitiative und Kreativität. Man kann gestellte Probleme abwandeln, sich selbst Probleme stellen oder in der Lebenswelt ausfindig machen. Die Lösungswege sind frei. Wie bestimmte Werkzeuge eingesetzt und die Ergebnisse dargestellt werden, bleibt in hohem Maße dem Problemlöser überlassen. Die mathematische Sprache kann dabei wie jede andere Sprache innerhalb allgemeiner Konventionen und Regeln flexibel benutzt werden.

Da also Offenheit im innersten Wesen der Mathematik angelegt ist, wirkt sich eine Unterdrückung dieser Offenheit auf das Lernen schädlich aus. Bemühungen um eine „Öffnung“ des Unterrichts ohne Bezug auf die innere Offenheit des FACHES bleiben leicht auf äußere Aspekte der Unterrichtsorganisation beschränkt. Gerade im Fach Mathematik besteht die große Gefahr, dass die Gleichschrittigkeit des Unterrichts zwar äußerlich zugunsten individualisierter, selbstgesteuerter Lernformen aufgebrochen wird, dass aber die Strukturen des kleinschrittigen Lernens innerhalb offener

Organisationsformen (Freiarbeit, Wochenplan, Projekte) ungestört fortwirken: Die Lernwerkstatt mit kleinschrittigem Arbeitsmaterial („bunte Hunde“ und „graue Päckchen“) ist keine Fiktion!

Es darf nicht übersehen werden, dass die Praxis des Rechenunterrichts immer noch von den schriftlichen Rechenverfahren beherrscht wird, die traditionell als Krönung des Unterrichts angesehen werden. Da diese Verfahren Algorithmen sind, kommt es bei ihnen auf eine genaue Beachtung der festgelegten Abfolge von Teilschritten an, und die Grundlagen der Algorithmen, das Einspluseins und das Einmaleins, müssen automatisch beherrscht werden. Im Gegensatz zu dieser Fixierung sind bei der Einführung der Zahlräume, der Behandlung des Einspluseins und des Einmaleins sowie des halbschriftlichen Rechnens aber Offenheit und Freiheit angemessen, da es sich dabei nicht um Algorithmen handelt. Hier ist ein Umdenken erforderlich, das sich am besten erreichen lässt, wenn Mathematik in der Lehrerbildung als Tätigkeit betrieben und erlebt wird.

Fachstrukturen als notwendige Lernumgebungen

Mit diesem Plädoyer für die Öffnung des Unterrichts vom FACH aus fordere ich keineswegs eine Auflösung der Fachstrukturen, ganz im Gegenteil. Die Kritik richtet sich nur gegen fachlich nicht gerechtfertigte methodische Festlegungen. Im Anschluss an *John Dewey* halte ich eine fachlich begründete genetische Strukturierung des Curriculums über die gesamte Schulzeit für absolut notwendig. Kinder sind ja selbst nicht in der Lage einzuschätzen, welche momentanen Lernerfahrungen für ihr weiteres Lernen bedeutsam sind. Sie brauchen daher fachlich klar bestimmte Lernumgebungen, die mit sicherem Blick für langfristige Lernprozesse arrangiert sind. Ich wage sogar die These, dass die produktiven Leistungen der Kinder umso höher sein werden, je besser der fachliche Rahmen überlegt ist.

Eine mit der Offenheit des FACHES voll verträgliche Lösung besteht m.E. in der Herausarbeitung fundamentaler Ideen der wichtigen Stoffgebiete, in der Auswahl der dazu passenden Anschauungs- und Arbeitsmittel sowie vor allem in der Formulierung FACHLICH ergiebiger Probleme und Aufgaben. Diesen Weg haben wir im Projekt „mathe 2000“ beschritten.

Es ist wichtig zu verstehen, dass die Vorgabe z.B. des Zwanzigerfeldes die Begegnung mit dem Einspluseins keineswegs einengt. Dieses Anschauungsmittel dient ja als **freies Handlungsfeld** für die strukturierenden Aktivitäten der Kinder, die ihre

Plättchen auf dem Feld legen, verschieben und wenden können, wie sie möchten. Natürlich beruhen alle diese Umformungen auf Rechengesetzen. Wie die Gesetze angewendet werden sollen, ist aber nicht festgelegt. Die „Kraft der Fünf“ (*Krauthausen* 1995), die in der Menschheitsgeschichte als effiziente Rechenhilfe erkannt wurde, ist in das Zwanzigerfeld eingebaut. Die Kinder werden sie früher oder später nutzen, weil sie nützlich ist, ohne dass sie ihnen aufgezwungen werden muss.

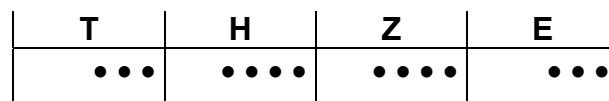
Durch die fachlichen Vorgaben des Curriculums ist nicht festgelegt, wie der Unterricht zu organisieren ist. Hier besteht m.E. ein großer Spielraum. Ein und dasselbe gute Problem kann unter Wahrung der FACHLICHEN Offenheit im Unterricht sehr verschieden behandelt werden. Dies möchte ich anhand eines Beispiels erläutern.

Zur Übung der schriftlichen Subtraktion und zur Pflege der allgemeinen Lernziele im 4. Schuljahr eignet sich das Thema „ANNA-Zahlen“ (*Wittmann/Müller* 1997). Unter diesen Zahlen versteht man vierstellige Zahlen der Form 5335, 7117, 2662 usw. Wenn man zwei ANNA-Zahlen mit den gleichen Ziffern wählt, kann man die kleinere von der größeren Zahl subtrahieren:

$$\begin{array}{r}
 5335 \\
 - 3553 \\
 \hline
 1782
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 7227 \\
 - 2772 \\
 \hline
 4455
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 6446 \\
 - 4664 \\
 \hline
 1782
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 8338 \\
 - 3883 \\
 \hline
 4455
 \end{array}$$

Es stellt sich heraus, dass nur ganz bestimmte Ergebnisse möglich sind, nämlich 891, 1782, 2673, 3564, 4455, 5346, 6237, 7128, 8019. Bei genauerer Analyse stellt sich heraus, dass dies die Vielfachen des kleinsten Ergebnisses 891 sind.

Die Begründung ergibt sich mit Hilfe der Stellentafel:



Um von der Zahl 3443 zur Zahl 4334 zu gelangen, braucht man nur ein Plättchen von der Hunderter- in die Tausenderspalte und ein Plättchen von der Zehner- in die Einerspalte zu schieben. Dies bedeutet in der Bilanz eine Veränderung um $+1000 - 100 - 10 + 1 = 891$. Wenn die Differenz zwischen den beiden Ziffern der beiden ANNA-Zahlen 2, 3, 4,... usw. beträgt, ist die entsprechende Differenz das Dop-

pelte, Dreifache, Vierfache usw. von 891, da jeweils 2, 3, 4, ... Plättchenpaare zu verschieben sind.

Damit ist der fachliche Rahmen abgesteckt. Wie er unterrichtlich umgesetzt wird, bleibt der Lehrerin überlassen. Wenn die Kinder in das Problem eingeführt sind, werden sie zuerst selbstgewählte Aufgaben rechnen, dann Muster entdecken, diese Muster beschreiben und schließlich zu begründen versuchen. Die Lehrerin kann die Aktivitäten stärker lenken und die Muster schon am Ende der Stunde besprechen. Sie kann die Aktivität in einer zweiten Stunde noch einmal aufgreifen und dann erst auf die Begründung zu sprechen kommen. Sie kann sich aber auch nur auf die Vorstellung des Problems beschränken und den Kindern für ihre Forschungen freie Hand lassen. Wesentlich ist in jedem Fall, dass die Kinder ihre eigenen Initiativen ergreifen und sich innerhalb des „Problemraums“ frei bewegen können. Es liegt in der Natur der Sache, dass bestimmte Muster hervortreten, z.B. Aufgaben mit gleichen Ergebnissen, Beziehungen zwischen den Ziffern der möglichen Ergebnisse oder Größenbeziehungen zwischen den Ergebnissen. Es gibt aber für die Lehrerin keinerlei Anlass, hier steuernd oder wertend einzugreifen: Die Aktivitäten sind offen. Es würde in diesem Zusammenhang zu weit führen, auf die pädagogische Bedeutung FACHLICH guter Unterrichtsthemen einzugehen. Hierzu sei nochmals auf *Dewey* (1902/1976) verwiesen. Ein genaueres Studium der Tatsache, dass sich guter Unterricht positiv und schlechter negativ auf die „Disziplin“ der Kinder auswirkt, wäre sicherlich ein lohnendes Feld für eine Kooperation zwischen Pädagogen und Fachdidaktikern.

Lehrerbildung und MATHEMATIK

Inwieweit sich die Öffnung des Mathematikunterrichts vom FACH aus in der Praxis durchsetzt, hängt ganz entscheidend davon ab, ob die Lehrerinnen und Lehrer selbst ein lebendiges Verhältnis zur elementaren Mathematik entwickeln konnten. *John Dewey* hat in einem weiteren grundlegenden Aufsatz „Die Beziehung zwischen Theorie und Praxis in der Lehrerbildung“, der zwei Jahre später erschienen ist (Dewey 1904/1977), die überragende Bedeutung des FACHstudiums für die spätere Berufspraxis aufgezeigt, unter der Voraussetzung, dass es genetisch angelegt ist und den Lehrerstudenten gründliche eigene Erfahrungen im Analysieren, Problemlösen, Begründen und Formulieren ermöglicht. Daraus ergibt sich die für viele Pädagogen si-

cher überraschende Einsicht, dass im FACHstudium und nicht etwa im Pädagogikstudium die Würfel über die innere Öffnung des Unterrichts fallen.

Die für die Lehrerbildung notwendigen Folgerungen sind freilich noch nicht in genügendem Maße gezogen worden. Die inhaltlich ausgedünnten, formalen Begriffsgerippe, die sich in der Zeit der „Neuen Mathematik“ leider eingebürgert haben, wirken weiter nach. Genauso wenig wie man aber ein Medizinstudium nur mit Anatomievorlesungen bestreiten kann, reichen für Lehrerstudenten nur Mathematikvorlesungen aus, in denen mathematische Begriffsapparate öffentlich autopsiert werden. Eine solche Ausbildung wird von den Studierenden (auch der höheren Stufen) mit Recht abgelehnt. Sie ist nicht nur nutzlos, sondern schädlich.

Ich glaube, dass wir in der fachwissenschaftlichen Ausbildung für die Grundschule grundlegend neue, auf die Bedürfnisse dieser Stufe zugeschnittene Konzepte entwickeln müssen. Wie ich bei entsprechenden Innovationen immer wieder feststellen muss, ist die Vorstellung von der Mathematik als einer Tätigkeit für sehr viele Studierende allerdings äußerst ungewohnt. Der formale Unterricht des Gymnasiums hat offensichtlich tiefe Spuren hinterlassen. Die Studierenden müssen sich erst daran gewöhnen, dass gerade die **Mathematikausbildung** die Schlüsselrolle für die Unterrichtsreform im Sinne der neuen Lehrpläne spielt.

Trotzdem besteht Grund zu Optimismus. Die Konturen einer spezifischen **Mathematikausbildung** für die Grundschule zeichnen sich bereits ab. Wir wissen heute, dass es möglich ist, Problemfelder der elementaren Mathematik so zu bearbeiten, dass aus ihnen sowohl Aktivitäten für Kinder als auch, auf einer höheren Ebene, Aktivitäten für Lehrerstudentinnen erwachsen können, die reichhaltig genug sind, um Ausschnitte arithmetischer oder geometrischer Theorien zu tragen.

Ich möchte dies durch *zwei Beispiele* aus meiner Lehrveranstaltung „*Einführung in die Arithmetik*“ andeuten.

Ein ausgezeichnetes amerikanisches Buch über Problemlösen in der Arithmetik beginnt mit folgender Fragestellung (Butts 1973, S. 4):

Zerlege die Menge $\{1, 2, \dots, n\}$ der ersten n natürlichen Zahlen in zwei summengleiche Teilmengen.

Einfache Spezialfälle dieser Aufgabe können (natürlich in entsprechender Formulierung) vom ersten Schuljahr an gestellt und von den Kindern mit Gewinn bearbeitet werden, wobei sicherlich bald effiziente Strategien, z.B. die Bildung summengleicher Pärchen, entdeckt werden. Wie ich in meiner Veranstaltung gesehen habe, bietet die

Aufgabe mit heuristisch abgeleiteten Folgeaufgaben auch Lehrerstudenten ein wunderbares Feld für die Entwicklung von Problemlösefähigkeiten und von Einsichten in grundlegende arithmetische Beziehungen. Durch ihre eigene Lernpraxis erwerben sie Erfahrungen aus erster Hand, die sie befähigen, später in diesem Problemfeld mit Kindern zu arbeiten.

Ein anderes von mir benütztes Beispiel ist die von *Heinz Steinbring* konstruierte Unterrichtseinheit „*Wer trifft die 50?*“ (*Steinbring* 1995). Ich habe die Aufgabe Lehrerstudentinnen in derselben Form zur Bearbeitung gegeben, wie sie Schülern des 4. Schuljahrs gegeben werden kann. Für die Studentinnen war es dann sehr eindrucksvoll, in der nächsten Vorlesungsstunde ein Videoband zu sehen, auf dem eine Gruppe von 12 Schülern eines 4. Schuljahres innerhalb von 30 Minuten alle 6 Lösungen, darunter auch eine ausgefallene Lösung, gefunden hat.

Beide Aufgaben können sehr schön in die elementare Theorie arithmetischer Reihen eingebettet werden, die bis zum Satz von *Sylvester* über die Darstellbarkeit natürlicher Zahlen als Summen aufeinander folgender Zahlen reicht.

Selbstverständlich werden diese und andere Themen später in der Vorlesung „Einführung in die Didaktik“ unter neuem Aspekt aufgegriffen. Eine weitere Behandlung kann in psychologisch-didaktischen Seminaren, in den Praktika und in der zweiten Ausbildungsphase erfolgen, so dass bei diesem Konzept Beziehungen quer über die fachwissenschaftliche, fachdidaktische und praktische Ausbildung hergestellt werden.

Es ist überhaupt keine Frage, dass Studien dieser Art zur "Mitte" der Lehrerausbildung gehören. Die Erfahrung zeigt, dass sich auch anfänglich skeptische Studentinnen mit einem solchen Lehrerbildungskonzept im Lauf der Zeit mehr und mehr anfreunden. Die Rückmeldungen, insbesondere aus der zweiten Phase, werden bei uns jedenfalls laufend positiver.

Schlussbemerkung

Die Durchführung des *Deweyschen Integrationsprogramms* und damit die „Aufhebung“ des scheinbaren Gegensatzes „Kind“ und „Fach“ (im doppelten Sinn des Wortes) ist keine leichte Aufgabe und wird Geburtswehen mit sich bringen. Das im pädagogisch-psychologischen Bereich vorhandene Wissen über das Wachstum von lebendigen Systemen könnte allerdings helfen, die vorherzusehenden Schwierigkeiten bewusster wahrzunehmen und zu überwinden.

Die *Genfer Schule* hat Anfang der siebziger Jahre folgendes Vierstufenmodell für die Koordination kognitiver Schemata in der Psychogenese entwickelt: Juxtaposition, Opposition, Kompromiss, Koordination. Zur gleichen Zeit hat der Wiener Gruppendynamiker *Gerhard Schwarz* ein sehr ähnliches Fünfstufenmodell für die Konfliktlösung in sozialen Gruppen entwickelt: Flucht, Kampf, Delegation, Kompromiss, Konsensus. Die Überwindung von Gegensätzen auf dem Weg zu höheren Entwicklungsstufen ist für lebendige Systeme anscheinend etwas Natürliches und Unvermeidliches. Die Lehrerbildung als Organismus, der über Jahrhunderte hin gewachsen ist, dürfte hier keine Ausnahme bilden.

Ich denke, dass die beiden um die Pole „Kind“ und „Fach“ gruppierten Auffassungen von Erziehung, Unterricht und Lehrerbildung jetzt lange genug auf den Stufen „Juxtaposition, Flucht, Opposition, Kampf“ verharrt haben. Es ist an der Zeit, in die Stufe wenigstens des Kompromisses einzutreten, um den Boden für die wahre Koordination aller wichtigen Aspekte vorzubereiten.

Literatur

Butts, Th., Problem Solving in Mathematics. Elementary Number Theory and Arithmetic. Glenview, Ill. and London: Scott, Foresman and Co. 1973

Dewey, J., The Child and the Curriculum (1902). In: The Middle Works of John Dewey, 1899-1924, ed. by Jo Ann Boydston, vol. 2, Carbondale, Ill. 1976,71-291

Dewey, J., The Relationship of Theory to Practice in Education (1904). In: The Middle Works of John Dewey, ed. by Jo Ann Boydston, vol. 3, Carbondale, Ill. 1977,249-272

Krauthausen, G., Die „Kraft der Fünf“ und das denkende Rechnen. In: Müller, G.N. und Wittmann, E.Ch. (Hrsg.), Mit Kindern rechnen. Beiträge zur Reform der Grundschule, Bd. 96, Frankfurt a.M.: Arbeitskreis Grundschule 1995, 87-108

Steinbring, H., Zahlen sind nicht nur zum Rechnen da! In: Müller, G.N. und Wittmann, E.Ch. (Hrsg.), Mit Kindern rechnen. Beiträge zur Reform der Grundschule, Bd. 96, Frankfurt a.M.: Arbeitskreis Grundschule 1995, 225-239

Wittmann, E.Ch., Aktiv-entdeckendes Lernen - vom Kind und vom Fach aus. In: Müller, G.N. und Wittmann, E.Ch. (Hrsg.), Mit Kindern rechnen. Beiträge zur Reform der Grundschule, Bd. 96, Frankfurt a.M.: Arbeitskreis Grundschule 1995, 10-41

Wittmann, E.Ch./Müller, G.N., Das Zahlenbuch. Mathematik im 4.Schuljahr, Düsseldorf: Klett 1997