Heinrich Winter

Mathematikunterricht und Allgemeinbildung

1. Was ist mathematische Allgemeinbildung?

Zur Allgemeinbildung soll hier das an Wissen, Fertigkeiten, Fähigkeiten und Einstellungen gezählt werden, was jeden Menschen als Individuum und Mitglied von Gesellschaften in einer wesentlichen Weise betrifft, was für jeden Menschen unabhängig von Beruf, Geschlecht, Religion u.a. von Bedeutung ist. Das ist natürlich keine Definition, es müssten hierzu mindestens noch Konzepte von den möglichen Bestimmungen des Menschen aufgezeigt werden.

Angesichts der tiefgreifenden Wandlungsprozesse in unserer Gesellschaft (Wertepluralismus, Verwissenschaftlichung des beruflichen und öffentlichen Lebens, Überflutung mit unterschiedlichsten Medienprodukten, zunehmende Spezialisierung in den Wissenschaften und in der Berufswelt, Wandel durch technische Innovationen,....) und angesichts der großen ungelösten weltweiten Probleme (Friedenssicherung, Befreiung von Hunger, Erhaltung der Umwelt, sozialer Ausgleich, Emanzipation der Frauen) wird es einerseits immer schwieriger, Allgemeinbildung zu definieren, andererseits aber auch immer wichtiger, dass möglichst viele Menschen eine möglichst gediegene Allgemeinbildung erwerben können. Eine funktionierende Demokratie ist ohne aufgeklärte, also selbständig denkende Bürger nicht vorstellbar.

Da sich Schulunterricht – ungeachtet der berechtigten Forderung nach interdisziplinären Aktivitäten – als Fachunterricht versteht, muss jedes Fach der allgemeinbildenden Schulen öffentlich aufweisen und begründen, inwieweit es für Allgemeinbildung unentbehrlich ist. Das kann nur als eine permanente Aufgabe verstanden werden.

Für den Mathematikunterricht an allgemeinbildenden Schulen (bis zum Abitur) soll nun skizziert werden, in welcher Weise er für Allgemeinbildung unersetzbar ist.

Der Mathematikunterricht sollte anstreben, die folgenden drei Grunderfahrungen, die vielfältig miteinander verknüpft sind, zu ermöglichen:

(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

(2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,

(3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.

Das Wort *Erfahrung* soll zum Ausdruck bringen, dass das Lernen von Mathematik weit mehr sein muss als eine Entgegennahme und Abspeicherung von Information, dass Mathematik erlebt (möglicherweise auch erlitten) werden muss.

In (1) ist die Mathematik als nützliche, brauchbare Disziplin angesprochen und tatsächlich ist sie in dieser Hinsicht von schier universeller Reichweite. Dies allein impliziert noch nicht eine Bedeutung für Allgemeinbildung; den Gebrauch von Mathematik, der über Alltagsrechnen hinausgeht, könnte man ja der Berufsausbildung zuweisen. Interessant und wirklich unentbehrlich für Allgemeinbildung sind Anwendungen der Mathematik erst, wenn in Beispielen aus dem gelebten Leben erfahren wird, wie mathematische Modellbildung funktioniert und welche Art von *Aufklärung* durch sie zustande kommen kann, und Aufklärung ist Bürgerrecht und Bürgerpflicht (und wird durchaus nicht in den Schoß geworfen).

Schon das Bürgerliche Rechnen verfehlt trotz seiner Lebensnähe seine mögliche allgemeinbildende Wirkung, wenn der Modellcharakter verhüllt und der Lebenszusammenhang undeutlich bleibt.

So ist z.B. der Kern der vielzitierten Zinsrechnung die Einsicht, dass es in unserer Gesellschaft üblich ist, für ein geliehenes Kapital Zinsen als Miete nach bestimmten überkommenen oder ad hoc vereinbarten Regeln (Formeln) einzufordern. Weder die Mietforderung selbst noch gar die Regeln zur Festsetzung der Höhe sind logisch zwingend oder naturgegeben. Der zentrale Begriff zum Verständnis üblicher Geldgeschäfte des Leihens und Verleihens ist der Zinssatz, also der Mietbetrag, der pro Zeiteinheit und pro Geldeinheit aus- oder eingezahlt wird. (In ihm steckt der Keim einer Differentialgleichung.) Als effektiver Zinssatz ist er ein Maß für die „Güte“ einer Anlage oder eines Kredits. Aber er ist eine normative Modellgröße. Wie plausibel dieses Modell für Kapitalflüsse ist, muss etwa durch Diskussion alternativer Modelle – ebenso bewusst werden wie das folgenreiche Widerspiel zwischen Soll- und Habenzinsen.

Darüber hinaus sollte heute jeder Schüler erfahren, wie Kapitalien bei Zins und Zinseszins (ohne und mit regelmäßigen Zahlungen) wachsen oder schrumpfen; das geschieht eben in der Regel nicht linear sonder exponentiell. Allgemein: Ohne eine Vorstellung von exponentiellem Wachstum und Zerfall kann kein Verständnis für ökologische und ökonomische Zusammenhänge zustande kommen.

Eine wünschenswerte und eigentlich notwendige Konzeption von Bürgerlichem Rechnen sollte heute auch Grundfragen der Bevölkerungskunde, der Altersversorgung, des Versicherungs- und Steuerwesens umfassen, und zwar als Bestandteile einer politisch-aufklärenden Arithmetik (und nicht etwa als Fachrechnen für Versicherungskaufleute oder Finanzbeamte).

Zur Allgemeinbildung zählen weiterhin deskriptive Modelle zu Phänomenen der physischen Welt, insoweit sie lebensrelevant sind, exemplarisch Mathematisierung in Technik und Naturwissenschaften erleben lassen und in der Geschichte der Menschheit eine bedeutende Rolle gespielt haben. Zu denken ist hier vor allem an elementare Bewegungen (Wurf, Fall, Drehung, Schwingung …..) einschließlich ihrer Ursachen und Folgen.

Die Wiederentdeckung des Fallgesetzes z.B. vor dem historische Hintergrund kann paradigmatisch erleben lassen: Aus einer plausiblen Annahme (Momentangeschwindigkeit wächst proportional zur Zeit) werden rein mathematisch Schlussfolgerungen gezogen, deren Deutung Fallphänomene erhellt, die man mit bloßem Auge und ohne Mathematik gar nicht wahrnehmen kann. Allgemein: Geglückte Mathematisierung eines realen Phänomens lässt hinter die Oberfläche schauen, erweitert wesentlich die Alltagserfahrung. Die Anwendung der Bewegungslehre auf die Fahrphysik ist geradezu ein unentbehrlicher Bestandteil von Aufklärung und Handlungsanweisung im Hinblick auf den motorisierten Straßenverkehr.

Ein wichtiges Beispiel aus der belebten Natur (aber auch Technik) ist die Modellierung des Zusammenspiels von Oberfläche und Volumen bei Körpern: Die Erkenntnis, dass bei maßstäblicher Vergrößerung eines Körpers die Oberfläche quadratisch, das Volumen aber kubisch wächst, lässt mit einem Schlag zahlreiche Erscheinungen verständlich werden, z.B. die, dass sehr kleine Lebewesen nahezu ununterbrochen mit der Futtersuche befasst sind. Eine notwendige Bedingung, dass Menschen Kultur hervorbringen konnten, liegt in der schlichten Tatsache begründet, dass sie eine gewisse Körpergröße aufweisen.

Um Modelle dieser Art entwerfen zu können, bedarf es des Erwerbs von Kenntnissen und Fertigkeiten aus Arithmetik, Algebra, Stochastik und Geometrie, später dann noch Analysis. Insofern gehören Grundvorstellungen über elementare Funktionen (exp, log, sin usw.) und das Beherrschen zugehöriger Prozeduren, insbesondere auch Näherungen zur Allgemeinbildung.

Was die Geometrie angeht, so ist eine mathematische Erfahrung der Welt um uns ohne Elemente der Darstellenden Geometrie nicht vorstellbar. Darüber hinaus ist die Kenntnis der Beziehungen zu Kunst, Design und Architektur von beiderseitigem Nutzen.

Die Schulung der Raumanschauung durch alle Schuljahre hindurch betrifft alle drei o.g. Grunderfahrungen. Allein die fundamentale Idee der Symmetrie zu erfahren, ist ein unersetzbarer Bestandteil von Allgemeinbildung. Die Entdeckung von Symmetrien innerhalb und außerhalb der Mathematik bedeutet die Feststellung, dass nicht alle denkmöglichen Erscheinungen Wirklichkeit werden können. Es sind z.B. nur 3 regelmäßige Pflasterungen der Ebene möglich.

Mit (2) ist sozusagen die innere Welt der Mathematik angesprochen. Jeder Schüler sollte erfahren, dass Menschen imstande sind, Begriffe zu bilden und daraus ganze Architekturen zu schaffen. Oder anders formuliert: dass strenge Wissenschaft möglich ist.

Eine fundamentale Idee ist die Zahl, zunächst die natürliche Zahl. Der extrem einfache konstruktive Aufbau (immer 1 dazu) steht im eklatanten Kontrast zum Reichtum an Theoremen und (häufig noch ungelösten) Problemen. Allein der Begriff Primzahl gibt Veranlassung zum Fragen, Experimentieren (auch mit dem PC), Vermuten, im Glücksfall zum Beweisen von Behauptungen. Ein besonderes (und früh zugängliches) Erlebnis ist die Erkenntnis, dass es unendlich viele Primzahlen geben muss. Der erstmals vor über 2000 Jahren gedachte Gedanke, dass und warum jeder vorgelegte Haufen von endlich vielen Primzahlen unmöglich alle enthalten kann und stets auf mindestens eine neue verweist, ist eine deduktive Figur, die etwas von der Kraft autonomen Denkens verspüren lässt. Aber schon die nächst liegende Frage, ob es auch unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, hat trotz enormer Anstrengungen bisher allen Beweisversuchen widerstanden. Wenn in der Zeitung steht, es sei eine neue riesig große Primzahl „gefunden“ worden, merkwürdigerweise fast das einzige, was überhaupt einmal an Mathematischem in die Presse gerät, dann weiß nun der so gebildete Schüler, dass immer noch fast alle Primzahlen nicht aufgeschrieben worden sind. Übrigens: Primzahlen finden heute Anwendung beim Verschlüsseln von Nachrichten.

Von fundamentaler intellektueller aber auch sehr praktischer Bedeutung ist die zweifellos voraussetzungsvolle Erfahrung der Erweiterbarkeit des Zahlbegriffs von den natürlichen über ganze und rationale bis zu den reellen Zahlen. Hierbei werden jeweils als unumstößlich geltende Intuitionen in Frage gestellt, was zunächst zu scheinbaren Paradoxien führt, dann aber den Erfahrungsraum in begrifflicher und rechentechnischer Hinsicht deutlich erweitert, zu sublimeren Intuitionen führt. Es ist ja u.a. einzusehen, dass –7 kleiner ist als 0, dass das

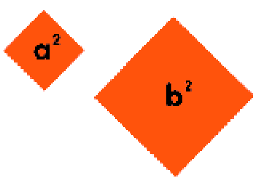
Produkt zweier Zahlen kleiner sein kann als jede der beiden, dass zwei negative Zahlen ein positives Produkt haben, dass zwischen zwei noch so eng beieinander liegenden rationalen Zahlen noch unendlich viele weitere rationale Zahlen liegen und zudem der Zwischenraum auf der Zahlengeraden damit trotzdem noch keineswegs lückenlos mit Zahlen abgedeckt ist, im Gegenteil: Hier liegen noch viel mehr irrationale Zahlen.

Am Beispiel der Messung der Diagonale mit der Seite des Quadrats (aparter noch des regulären Fünfecks) kann nachentdeckt werden: Einerseits gibt es in einem bestimmten Sinne kein gemeinsames Maß für beide, Diagonale und Seite sind inkommensurabel zueinander, andererseits kann die über Wechselwegnahme gesteuerte Messprozedur zu beliebig genauen rationalen Näherungswerten führen (nämlich zur Folge 1, 3/2, 7/5, 17/12, 41/ 29, ….), die sich systematisch oszillierend einem Grenzwert nähern, der nicht rational sein kann, aber den in Gedanken unendlich langen Messprozess zu einem konstruktiven Ende führt, zum „Ergebnis“, dass die Diagonale das $\sqrt{2}$ -fache der Seite ist. Die obige Folge rationaler Zahlen definiert die neue Zahl $\sqrt{2}$.

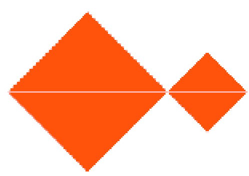
Ohne Bezugnahme auf geometrische Fragestellungen, insbesondere ohne Analyse der Zahlengeraden, können begriffliche Schritte der o.g. Art nicht verständlich werden, aber auch nicht ohne ein Mindestmaß algebraischer Fertigkeiten. Variable, Terme, Formeln, Gleichungen gebrauchen zu lernen, ist eines der wichtigsten allgemeinbildenden Ziele des Mathematikunterrichts. Zugespitzt: Die mathematische Allgemeinbildung ist nicht durch das definiert, was ohne Formeln „geht“, sondern ist nur etwas wert, wenn sie den verständigen Gebrauch von Formeln nachdrücklich anstrebt. Eine Formel ist nicht nur ein allgemeines Rechenschema, sondern auch Ausdruck von Gesetzhaftem. Den Segen von Formeln kann man allerdings nur erfahren, wenn man *kreativ* mit ihnen umgehen kann. Besonders eindrucksvoll wird das erlebt, wenn durch Formeln neue geometrische Figuren geschaffen werden.

Die Geometrie war bekanntlich die erste deduktive Wissenschaft, und diese Leitfunktion hat sie bis heute erhalten: Etwas more geometrico zu begründen, gilt überall als wirklich stichhaltige Argumentation. Deduktive Ordnung zwischen Aussagen zu entdecken und auszudrücken, ist hier das allgemeinbildende Ziel, das sicher nicht dann schon als erreicht angesehen werden kann, wenn in der Klasse Beweisrituale vorgeführt werden. Wie auch die Geschichte lehrt, kann Deduktivität in der Geometrie (und dann auch in anderen Bereichen) nur erfahren werden, wenn sie von einer kreativen Konstruktivität getragen und von der Suche nach Symmetrien und Asymmetrien geleitet wird. Ein Paradefall ist der Satz des Pythagoras, der in operativer Sprache lautet: Wenn mir zwei Quadrate mit den Seitenlängen a und b vorgelegt werden, so kann ich stets ein drittes Quadrat mit der Seitenlänge c konstruieren, so dass für die Flächeninhalte $a^2 + b^2 = c^2$ gilt. Dieser Satz motiviert sich nicht ohne weiteres durch das Anblicken rechtwinkliger Dreiecke, und seine Richtigkeit erschließt sich nicht dem blanken Augenschein. Es bedarf umstrukturierender Denkschritte (des Sehens mit den Augen des Geistes, wie Platon sagt). Eine der vielen Möglichkeiten deutet diese Figurenfolge an. Die umformenden Denkschritte können hier sogar durch ganz praktische Handlungen realisiert werden.

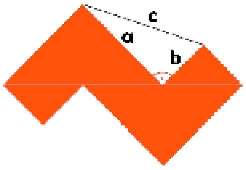
1) Start: Keine Symmetrie



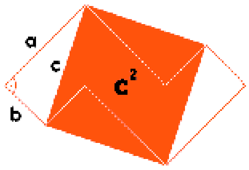
2) Achsensymmetrie



3) Zentralsymmetrie



4) Ziel: Höchstmaß an Symmetrie



Von allgemeinbildendem Wert ist die Erfahrung, wie über Umorganisation einer Konfiguration, verbunden mit begrifflichen Absicherungen, eine neue Konfiguration entsteht, so dass die Wahrheit der Behauptung unbezweifelbar erkennbar wird, und gegen jeden Einwand verteidigt werden kann.

Mit (3) ist angesprochen, was früher der formale Bildungswert der Mathematik genannt worden ist: Mathematik als Schule des Denkens. Dabei bestand und besteht der Anspruch, die Übung im strengen Denken innerhalb der Mathematik discipliniere die allgemeine – also auch außermathematische – Praxis des Denkens. Tatsächlich ist es aber wohl so, dass ein weiter Transfer sich nicht von selbst einstellt, vielmehr ausdrücklich gewollt und durch geeignete didaktische Interventionen gefördert werden muss.

Unterrichtlich erschließbar ist die Förderung von Problemlösefähigkeiten, dabei insbesondere die Eingewöhnung in die immer bewusster werdende Nutzung heuristischer Strategien (wie z.B. das Ausnutzen von Analogien) und mentaler Techniken (wie z.B. Klassifizieren und Anordnen).

Die Mathematik mit ihrem hohen Grad an innerer Vernetzung, was interne Kontrollen ermöglicht, und ihren vielfältigen Beziehungen zur außermathematischen Realität weist einen unerschöpflichen Reichtum an Aufgaben unterschiedlichsten Anspruchs auf, so dass sich Chancen bieten, den Gebrauch des Verstandes zu trainieren, *falls* dabei die Reflexion auf die eigenen Tätigkeiten wesentlich und beständig mit einbezogen werden.

Da wird eine Aufgabe nicht nur gelöst und damit basta, vielmehr kommt es während der Lösungsbemühungen und nach der Auflösung oder nach dem Eingeständnis des Misserfolgs zu Vor- und Nachfragen etwa der folgenden Art:

- Was macht die Aufgabe so schwierig? Was ist der springende Punkt in der Problembarriere, also in dem, was zwischen Gegebenem und Gesuchtem liegt? Komme ich mit Probieren weiter? Hilft eine Zeichnung? Hilft eine andere Bezeichnungsweise? Kann ich die Aufgabe in Teilaufgaben zerlegen? Habe ich schon mal eine ähnliche oder irgendwie verwandte Aufgabe gehabt, deren Lösung hier vielleicht weiterhelfen kann? Kann man Symmetrien oder Asymmetrien erkennen? Kann man extreme Fälle (z.B. Sonderfälle) ausloten und nutzen? Kann ich rückwärts arbeiten, einen Weg vom Gesuchten zum Gegebenen gehen?
- Kann ich die Lösung auf andere Art kontrollieren? War das Ergebnis zu erwarten, oder ist das Ergebnis irgendwie überraschend? Gibt es womöglich einen kürzeren, eleganteren Lösungsweg? Kann ich das Resultat oder den Lösungsweg vielleicht noch in anderen Fällen benutzen? Was sind ähnliche Aufgaben, die ich nun selbst stellen kann? Was weiß ich jetzt besser, genauer als vorher? usw.

Trivialerweise ist grundsätzlich alles menschliche Handeln fehlbar. Die Besonderheit in der Mathematik ist, dass hier Fehler und Missverständnisse objektiv aufweisbar und kritisierbar gemacht werden können und nicht etwas darstellen, was ein Laie einem Experten glauben muss. Was für Allgemeinbildung noch wichtiger ist: Fehler, Missverständnisse, Brüche können, indem ihre Genese aufgedeckt wird, zum Ausgangspunkt tieferen Verständnisses werden, können sozusagen ins Produktive gewendet werden. Hierfür gibt es auch zahlreiche Beispiele in der Geschichte der Mathematik.

Reflexion auf das eigene Denkhandeln muss auch zum Ziel haben, unterschiedliche Argumentationsweisen durchschauen und bewerten zu lernen, ohne dass Logik als Fach auftreten müsste. Immerhin sollte zum eisernen Bestand von Allgemeinbildung die Einsicht gehören, was eine stichhaltige Schlussweise ist.

Wenn A gilt, dann gilt auch B.
Nun gilt A
Also gilt auch B.

Aus A folgt B.
A ist wahr
Also ist B wahr.

Dies ist schlüssig gänzlich unabhängig von der inhaltlichen Bedeutung von A und B. Die Inhaltsoffenheit ist gerade das Logische daran. Entsprechend notwendig ist die Einsicht, dass z.B. folgende Argumentationen nicht schlüssig sind:

Wenn A gilt, dann gilt auch B
Nun gilt A nicht.
Also gilt auch B nicht.

Wenn A gilt, dann gilt auch B.
Nun gilt B.
Also gilt auch A.

Etwa an Hand von Euler-Kreisen können logische Sachverhalte anschaulich gemacht werden, was jedoch nur lohnenswert ist, wenn dies mit dem tatsächlichen Argumentieren in mathematischen und außermathematischen Kontexten kritisch in Zusammenhang gebracht wird: Mathematik als Schule geordneten Sprechens.

Besondere Beachtung müsste auch die Gegenüberstellung von unvollständiger und vollständiger Induktion finden, eine fast entmutigend schwierige Thematik.

Unverzichtbar schließlich ist die Reflexion auf das eigene Tun, wenn es um die Modellierung außermathematischer Phänomene geht, womit eine Beziehung zur Grunderfahrung (1) angesprochen ist. Es muss ja überprüft werden, inwieweit das in Diskussion befindliche Modell adäquat ist: Welche beobachtbaren oder wünschbaren Merkmale finden Berücksichtigung, welche werden „der Einfachheit halber“ ausgeblendet? Welcher Preis ist für die Vereinfachung zu zahlen? Wie sieht es mit konkurrierenden evt. „besseren“ Modellen aus? Wie plausibel sind überhaupt die vorgängigen Modellannahmen?

Soll z.B. die Meinung in einer (großen) Bevölkerung hinsichtlich einer Alternative (für Kandidat X, nicht für Kandidat X) durch Erheben und Auswerten (Berechnung eines Vertrauensintervalls) einer Stichprobe erforscht werden, so mag sich das Bernoulli-Modell anbieten: Der Befragung von Personen entspricht eine Folge von Ziehungen mit Zurücklegen aus einer Urne mit einem unbekannten Anteil von X – und Nicht-X-Kugeln.
Dadurch wird vorausgesetzt:

- Die Befragungsaktion verläuft stabil in der Zeit und unabhängig von subjektiven Einflüssen.
- Die Ergebnisse der einzelnen Befragungen sind voneinander unabhängig; es gibt z.B. keine Mitläufereffekte.

- Die Auswahl der befragten Personen ist rein zufällig.
- Jede einzelne Befragung hat ein eindeutiges Ergebnis.
- Die Befragungsergebnisse sind je von gleichem Gewicht.

Inwieweit diese Annahmen aber wirklich zutreffend sind, das eben ist zu diskutieren.

Noch brisanter als das Problem der Angemessenheit eines Modells ist die Frage nach dahinterstehenden Interessen: Welche Bedeutung hat die Modellbildung letztendlich für das Leben der Menschen? Das betrifft nicht nur normative Modelle zu Erscheinungen in Wirtschaft, Staat und Gesellschaft (Beispiele: Altersversorgung in der Sozialversicherung, Tariffunktion in der Einkommenssteuer), sondern auch scheinbar neutrale, „nur“ der wissenschaftlichen Forschung dienende Modellbildungen naturwissenschaftlicher Art. Die Wurfparabel z.B. beschreibt approximativ die Bahn des Lobs im Tennisspiel wie auch den Weg einer todbringenden Granate. Im Augenblick der Kreation von Modellen zur Erklärung und Beschreibung von Erscheinungen unserer natürlichen Welt braucht nicht erkennbar zu sein, zu welchen Zwecken das neue Wissen einmal benutzt werden wird, zum Segen, zum Fluch, zu beiden zugleich, zu keinem von beiden. Zumindest müsste wahrgenommen werden, dass die Mathematik – gewollt oder nicht – in die Händel dieser Welt verstrickt ist, direkt oder vermittelt.

2. Zur Realität der Allgemeinbildung

Die skizzierten Ziele der Allgemeinbildung im Mathematikunterricht stehen offenbar im Widerspruch zu den tatsächlichen Erfolgen und zur Einschätzung der Mathematik in einer breiten Öffentlichkeit.

Offenbar gelingt es bisher nur partiell, die große Masse vom Wert mathematischer Allgemeinbildung zu überzeugen. Zwar wird und muss jedermann einräumen, dass Mathematik anspruchsvoll (schwierig) und von unbestreitbarem Nutzen ist. Das aber muss keineswegs eine Hochschätzung als allgemeinbildendes Schulfach implizieren: Ihr intellektueller Anspruch wird als etwas gedeutet, was nur Spezialbegabungen zugänglich ist und also für die breite Masse von Natur aus uninteressant sein muss. Es ist eine Art höheres Schachspiel, schön und spannend für dafür eigens begabte Menschen. Und der Nutzen der Mathematik ist bedeutsam für die, die ihn beruflich ausschöpfen, Experten verschiedener Art (Ingenieure, Ökonomen, Physiker usw.).

Sichtbaren Niederschlag findet diese Einschätzung in dem Umstand, dass die Mathematik in den Feuilletons großer (deutscher) Zeitungen allenfalls eine periphere Rolle spielt (ganz im Gegensatz zu Literatur, bildender Kunst, Musik, Theaterleben, Philosophie, Geschichte); nur hier und da – und dann meist in Verbindung mit Technik, Computerwesen und Naturwissenschaft – wird etwas Mathematisches erwähnt. Eine Ausnahme machen interessanterweise isolierte Mitteilungen über „neue“ Primzahlen (und i.J. 1992 die mehr oder minder geglückte Berichterstattung über den Beweis des großen Fermatschen Satzes) und Anmerkungen über Persönliches (etwa Erfolge von Schülern in Wettbewerben oder Auszeichnungen von Mathematikern). Dass Mathematiker (am liebsten) nur mit Mathematikern kommunizieren, ist zwar verständlich, aber der Anspruch der Mathematik als Allgemeinbildungsfach ist *öffentlich* zu legitimieren, geht es doch auch um öffentliche Finanzen.

Nach wie vor gilt es offenbar nicht als blamabel, eher als normal oder gar als chic, nichts von der Mathematik verstanden zu haben oder zu verstehen, trotz 13-jähriger Schulbildung. Man hat es ja ohne Mathematik (oder angeblich ohne) durchaus zu etwas gebracht. Fachwörter aus der Mathematik (Sinus, Arcustangens, Differenzenquotient,....) rufen (vielleicht zu gleichen Teilen) Bewunderung und Abscheu hervor. Sobald es in öffentlichen Diskussionen um Themen mit wesentlich quantitativen Aspekten geht (Einkommen, Steuern, Zinsen, Abgaben, Mobilität, Wahlen, Beschäftigung,.....) kommt regelmäßig bald der Wunsch auf, doch bitte niemanden mit Zahlen oder gar Formeln zu ermüden und zu langweilen und die Details den Experten zu überlassen.

Es wird eher als erheiternd hingenommen, wenn ein Bundeswirtschaftsminister nicht weiß, wie viele Nullen eine Milliarde hat, oder wenn ein hochbezahlter Quizmaster die Lösung der Aufgabe „30 : 0,5“, die der Kandidat nicht beantworten kann, vom Zettel abliest mit der Bemerkung „60, aber fragen Sie mich nicht warum!“, was mit großem Beifall honoriert wird.

Trivialerweise sind alle Schulfächer vom unvermeidlichen Vergessen betroffen. Wer kann schon wenig später noch längere Passagen aus einem Werk der Weltliteratur zitieren oder weiß noch, was es mit den Keplerschen Gesetzen auf sich hat oder wie die Unabhängigkeit der USA zustande kam? Aber im Falle der Mathematik scheint es erstens eine besonders radikale Extinktion von Wissen zu geben, die zweitens häufig genug mit ausgesprochenen Hassgefühlen verknüpft ist. Man kann sich nicht deutlich genug vor Augen führen: Ausgerechnet Mathematik als Musterfall absoluter Klarheit wird verbreitet als Musterfall besonderer Unverständlichkeit empfunden.

Es darf daher nicht wundern, wenn Vorschläge, die auf eine Reduktion des Mathematikunterrichts für alle hinauszulaufen scheinen, eine so große Resonanz in den Medien und so viel Beifall in der Öffentlichkeit finden.

Wenn Universitätsmathematiker in erster Linie ein Interesse an der Förderung leistungsfähiger (begabter Schüler) zeigen, die später eine akademische Berufsausbildung mit höheren Anteilen von Mathematik ansteuern, und Versuche zur Republikanisierung mathematischer Gedanken eher misstrauisch betrachten, so wird nicht nur – gewollt oder nicht – das verbreitete Vorurteil, Mathematik sei nur Leuten mit Spezialbegabung zugänglich, unterstützt, sondern auch denen indirekt argumentativ zugearbeitet, die keinen Sinn (mehr) darin sehen, dass Mathematik ein gewichtiges Pflichtfach bis zum Abitur bleiben soll.

Soll aber an der Forderung nach mathematischer Allgemeinbildung (etwa im Sinne der o.g. Grunderfahrungen) festgehalten werden, so läuft das im wesentlichen darauf hinaus, den Mathematikunterricht in seinen Zielvorstellungen, Inhalten und Lehr- und Lernweisen entsprechend zu verbessern. Es gibt erfreulicherweise auch genügend viele Befunde (die leider freilich wenig öffentliche Aufmerksamkeit finden), die belegen, dass Verbesserungen auch realisierbar sind.

Was wenig produktiv erscheint, sind Vorschläge, die auf Abwahlen, inhaltliche Reduktionen, äußere Differenzierungen u.a. hinauslaufen. Wenn sie auch realistisch klingen mögen, sie sind im Kern Ausfluss vorauseilender pädagogischer Resignation. Schon die Einteilung in Grund- und Leistungskurse in der SII ist kaum mit dem Allgemeinbildungsgedanken verträglich.
Ein stärkerer Einsatz von Computern (etwa zum Experimentieren) oder die Berücksichtigung neuester lebensrelevanter Anwendungen (Solarkraftwerke) oder die Behandlung „moderner“ Stoffe (Chaos und Fraktale) sind zwar durchaus erwünschte Vorschläge zur Innovation, treffen aber in ihrer Isoliertheit nicht ins Zentrum des Problems. Entscheidend ist vielmehr, dass Lehrer die „pädagogische Dimension“ (Wagenschein) der Mathematik, die „Mathematik als pädagogische Aufgabe“ (Freudenthal) entdecken und in Unterrichtskonzepten zu konkretisieren suchen.

Bereits in der ersten Phase der Lehrerausbildung sollte der künftige Mathematiklehrer erfahren, dass mathematische Inhalte nicht nur nach innerfachlichen Ordnungsprinzipien strukturiert, sondern auch aus anderen pädagogisch relevanten Blickwinkeln gesehen und verstanden werden müssen, vor allem aus der Sicht

- der historischen Genese von Ideen,
- der möglichen Bezüge zu unterschiedlichen außermathematischen Bereichen,
- der Akzentuierung nach übergeordneten fundamentalen Ideen,
- der möglichen Verwurzelungen in Alltagserfahrungen,
- der möglichen unterschiedlichen Repräsentationsformen,
- der möglichen Distanzen zu Primärintuitionen und damit zu möglichen Verständnishürden,
- der möglichen Erschließbarkeit durch selbständige Lernaktivitäten in überschaubaren Problemfeldern.

Am Beispiel der reellen (Schul-) Analysis hieße das etwa: Kenntnisse erwerben über

- Ideengeschichte der Analysis (Archimedes, Cavalieri, Fermat,....),
- Anwendungen in Naturwissenschaften , Wirtschaftswissenschaften, Sozialwissenschaften mit ihren je eigenen Ausformungen der Begriffe; Beziehungen zur Erkenntnistheorie und Logik,
- fundamentale Begriffe, die auch über die Analysis hinausweisen, wie Approximation, Algorithmus, Unendlichkeit, Iteration, Extremwert,
- Wachstumsvorgänge, Ortsbewegungen, Formänderungen im alltäglichen Leben,
- qualitativ-umgangssprachliche Beschreibungen, bildliche Darstellungen (Graphen, graphisches Differenzieren und Integrieren,...) formale Darstellungsweisen und ihr Zusammenhang,
- Probleme und (scheinbare) Paradoxien des Unendlichen (beständiges und trotzdem nicht grenzenloses Wachstum unendlicher geometrischer Reihen; Zenons Paradoxien; „null sein“ vs. „null werden“,...),
- Angebot von Aktivitätsfeldern (reale statistische Daten, empirische Graphen von Funktionen, mechanische Modelle realer Phänomene,...).

Aber – natürlich – auch gut vorbereitete Lehrer können das Erreichen der genannten Ziele nicht erzwingen. Die zu respektierende Tatsache, dass der Unterrichtsplanung Grenzen gesetzt sind, weil es in der Schule um Menschen geht, sollte aber gerade nicht dazu missbraucht werden, die Forderung nach bestmöglicher Vorbereitung auf den Lehrerberuf, einen der wichtigsten und schwierigsten Berufe überhaupt, zu relativieren.