Unterrichtsbezogene Schulentwicklung im Rahmen des BLK-Modellversuchs SINUS am Beispiel des Faches Mathematik

Volker Ulm

Wie kann Schule in Zukunft ihren Aufgaben gerecht werden?

Diese Frage – so oder so ähnlich formuliert – steht gegenwärtig im Zentrum der aktuellen bildungspolitischen Diskussion. Dass sich neben vielen anderen Aspekten auch die Art des Unterrichts weiterentwickeln muss, ist dabei unstrittig.
Ich möchte die Komplexität dieser Frage im Folgenden auf das Fach Mathematik reduzieren. Der Mathematikunterricht soll Kompetenzen vermitteln wie: ein gut organisiertes Grundwissen, Problemlösefähigkeit, ein tragfähiges Verständnis für mathematische Konzepte oder flexible Anwendbarkeit des Gelernten. Nur wie können derartige Ziele erreicht werden?

Jemand, der sich hierüber viele Gedanken gemacht hat, ist Heinz Klippert. Von ihm stammt folgende Charakterisierung der Unterrichtsalltags:

„Wissen wird serviert, geschluckt, verdaut, vergessen."

Vermutlich beschreibt er die Situation sogar zu optimistisch, denn wenn ich an meine Oberstufenschüler denke, bin ich mir nicht sicher, ob alle Schüler die ihnen präsentierten Inhalte auch wirklich verdauen.

Das Dilemma des Unterrichtens liegt im Servieren der Inhalte durch die Lehrkräfte: gut gemeint, arbeitsaufwendig, aber oft ohne den gewünschten Erfolg. Der Lehrer plant und organisiert, er erklärt, fragt und korrigiert, er strukturiert und visualisiert, er problematisiert und löst Probleme, er übernimmt Verantwortung – und wird für alles verantwortlich gemacht. Ein Unterricht, bei dem der Lehrer in großen Teilen allein agiert, verhindert vieles, was wir uns von unseren Schülern wünschen, nämlich Eigenständigkeit, die Übernahme von Verantwortung für das eigene Lernen, Argumentationsfähigkeit und Kooperationsfähigkeit.

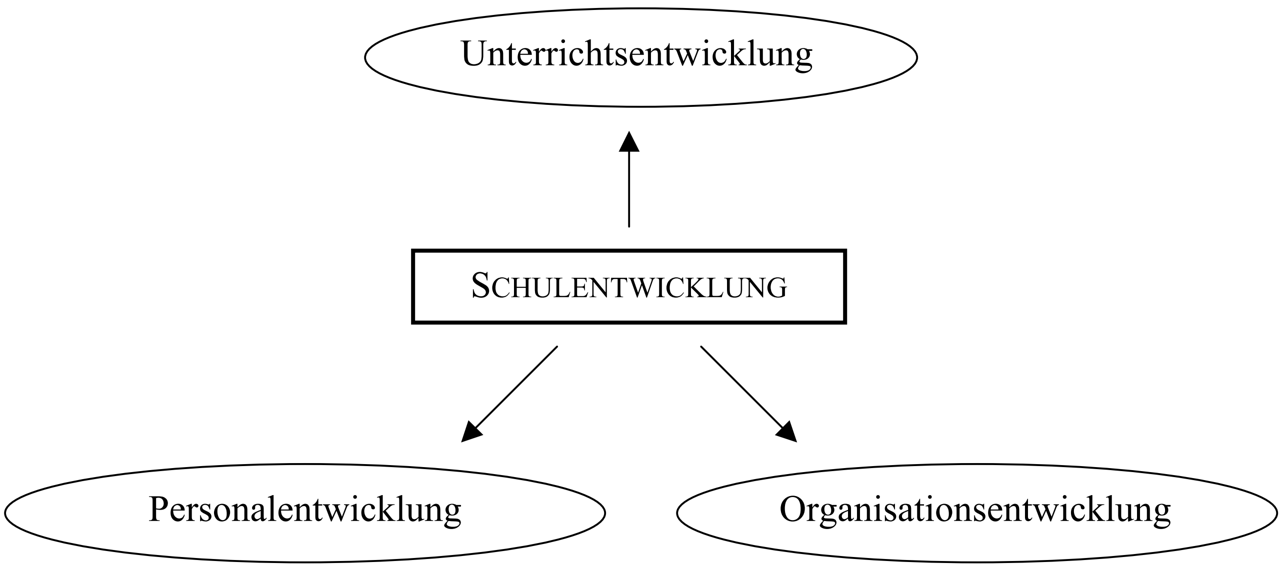
Wie lassen sich konkret Veränderungen bewirken? Sicher nicht, indem wir den gängigen Unterricht pauschal verurteilen und einen gänzlich anderen fordern.

Dies wäre zwar bequem, wäre aber falsch und ungerecht und ist auch gar nicht notwendig. Eine Vorgehensweise der kleinen Schritte ist angesagt.
Im Folgenden sollen Wege aufgezeigt werden, wie sich Mathematikunterricht im Kleinen, in unscheinbaren Standardsituationen des Unterrichtsalltags, weiterentwickeln kann, und zwar in so vielfältiger Art und Weise, dass (hoffentlich) die unterschiedlichsten Lehrerpersönlichkeiten mit ihren individuellen Unterrichtsstilen Anregungen für *ihren* Unterricht finden können. Keine der dargestellten Ansätze alleine schafft einen besseren Unterricht, keine ist etwas ganz neues. Aber auf den bewussten Einsatz und die Mischung kommt es an!

1. DAS KONZEPT DER PÄDAGOGISCHEN SCHULENTWICKLUNG

Der Begriff „Schulentwicklung" ist gegenwärtig eines der zentralen Schlagworte in der Bildungsdiskussion. Wer sagt, er ist gegen Schulentwicklung, rückt sich leicht ins Abseits und wird als innovationsfeindlich angesehen.
Andererseits ist dieses Wort an sich so inhaltsleer, dass man vieles darunter verstehen kann. Deshalb möchte ich zunächst einige Begriffe gegeneinander abgrenzen.

Schulentwicklung zielt auf drei Bereiche ab:



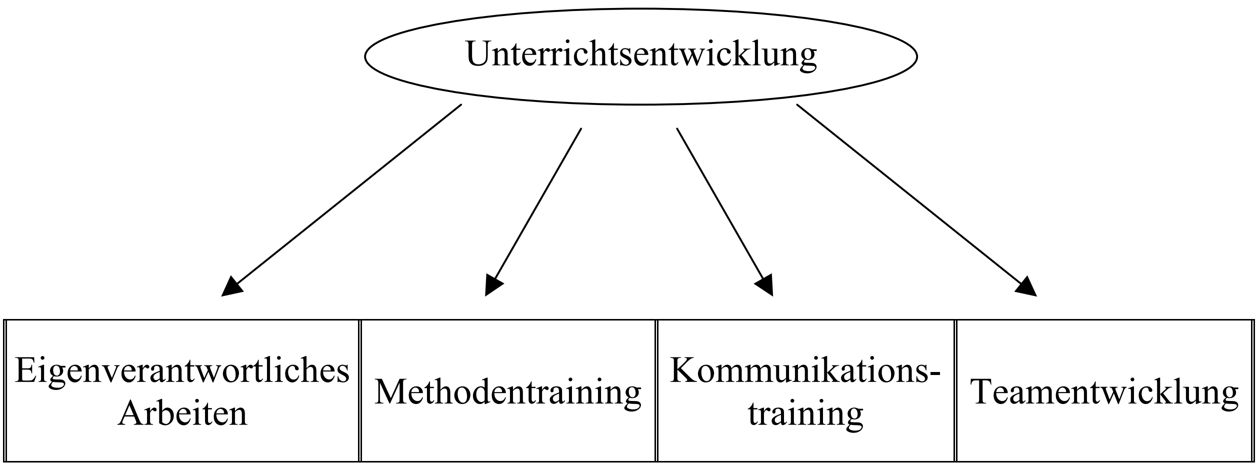
- Unterrichtsentwicklung rückt die Weiterentwicklung des Unterrichts in didaktisch-methodischer Hinsicht in den Mittelpunkt und legt dabei insbesondere auf eigenverantwortliches, selbstorganisiertes und kooperatives Arbeiten Wert.

- Personalentwicklung zielt auf die Aus- und Weiterbildung der Lehrkräfte sowie die Kommunikation und Kooperation im Kollegium ab.

- Organisationsentwicklung befasst sich mit bürokratischen Abläufen und der Organisation der Schulbetriebs. Zudem legt sie auf eine zunehmende organisatorische Beteiligung von Eltern und Schülern, eine Intensivierung der Außenbeziehungen der Schule sowie eine Professionalisierung des Schulmanagements Wert.

Ich werde mich bei allem Weiteren auf die Unterrichtsentwicklung beschränken, denn schließlich ist der Unterricht das Kerngeschäft des Lehrers und der Ort, an dem letztendlich schulische Qualität produziert und verbessert werden soll.

Heinz Klippert stellt in zahlreichen Veröffentlichungen ein detailliertes und vielfach praxiserprobtes Konzept der Unterrichtsentwicklung (bzw. wie es nennt: der Pädagogischen Schulentwicklung) vor. Es setzt direkt beim Lernen und Arbeiten im Unterricht an und beruht auf vier Säulen:



Diese Säulen sind dabei nicht als isolierte Handlungsfelder zu betrachten, sondern eher als Schwerpunktsetzungen, die in der konkreten Unterrichtspraxis eng miteinander verwoben sind.

Auf dem zentralen BLK-Server http://blk.mat.uni-bayreuth.de ist unter Materialien zum Mathematikunterricht ein Artikel mit dem Titel „Pädagogische Schulentwicklung im Mathematikunterricht“ zu finden, in dem versucht wird, aufzuzeigen, wie die Klippertschen Ideen im Mathematikunterricht umgesetzt werden können. Damit möchte ich mich im Folgenden nicht weiter befassen
Ich möchte vielmehr einige Gedanken aus dem SINUS-Programm aufgreifen, mit zahlreichen Beispielen illustrieren und in dieses Hintergrundkonzept der Schulentwicklung einordnen. Es soll deutlich werden:

SINUS ist Schulentwicklung in ihrer besten Form!

Dabei lege ich bewusst einen Schwerpunkt auf Unterrichtsbeispiele, auf konkrete Aufgaben für den Unterricht.

Noch ein Satz vorneweg: Bei allem Aktivismus zur Schulentwicklung sollte man einen Grundsatz nicht aus den Augen verlieren, wie ihn der Schulpädagoge Hilbert Meyer formuliert hat [Meyer, 1997]:

> *„Schulentwicklung ist kein Selbstzweck. Ihre einzige Legitimation liegt darin, das Lehren, Lernen und Leben in der Schule humaner und erfolgreicher zu machen.“*

Ein Kollege hat einmal etwas ironisch gesagt: „Man könnte so schön Schulentwicklung betreiben, wenn es nur diese Schüler nicht gäbe.“

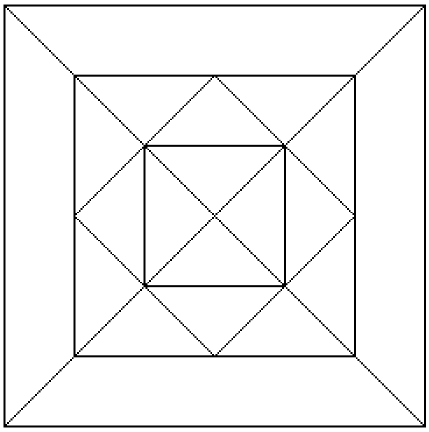
2. Offene Fragestellungen

Aufgaben im Mathematikunterricht sind in der Regel zielorientiert formuliert und laufen auf eine einzige, leicht überprüfbare Lösung zu, wobei der anzustrebende Lösungsweg bei komplexeren Problemen meist durch die Aufgabenstellung vorgegeben wird. Die Tätigkeiten der Schüler beschränken sich oftmals nur darauf, aus der aktuell behandelten Unterrichtssequenz die Lösungsverfahren zu suchen und anzuwenden, auf die die Aufgabenstellung hinweist.
Ein weitaus vielschichtigeres Anspruchsniveau bieten offene Aufgaben, deren Formulierung ein Problem zunächst nur grob umreißt, die aber als Ausgangspunkt für eigenständiges (nicht nur) mathematisches Arbeiten, Forschen und Entdecken dienen können.
Offenheit bedeutet also, dass die Aufgabe keine eindeutige Fragestellung vorgibt, sondern dass die Schüler aufgefordert sind, selbständig zu analysieren, zu interpretieren, Fragen zu stellen, Entscheidungen zu treffen, aufgeworfene Probleme zu lösen und erarbeitete Ergebnisse zu diskutieren und zu präsentieren.

Hierzu ein Beispiel, das sich in verschiedenen Jahrgangsstufen und Unterrichtszusammenhängen nutzen lässt – wie z.B. Symmetrie, Dreiecke, Vierecke, Umfang, Flächeninhalt, Prozentrechnung, zentrische Streckung, ... (vgl. auch [Wurz, 1998]):

Balkongitter

Hier siehst du das Muster eines Balkongitters:



a) Stelle möglichst viele Eigenschaften dieser Figur zusammen!

b) Überlege dir interessante Fragen zu dem Muster und lasse sie von deinem Nachbarn beantworten!

c) Präsentiere mit deinem Nachbarn gemeinsam die schönsten Ergebnisse im Klassenteam.

Hier kann man vielfältige Richtungen gehen:

- Wie viele Dreiecke sind zu erkennen? Wie viele Vierecke?
- Welche Symmetrien gibt es?
- Wie viel Prozent der Fläche liegen im innersten Quadrat?
- Wenn die Figur 1 dm² groß ist, wie lang sind dann alle Strecken zusammen?
- . . .

Das nächste Beispiel für die 6. Jahrgangsstufe stellt eine offene Situation aus dem Erfahrungsbereich der Kinder dar, die zum Nachdenken und Diskutieren einlädt, die Annahmen und Entscheidungen erfordert, gleichzeitig aber auch viel Freiraum für mathematisches Denken und Arbeiten bietet.

Geburtstag im Kino

Florian möchte an seinem Geburtstag sieben Freunde ins Kino einladen. Er informiert sich über Preise:

Platzreihen 1 – 10	5 €
Platzreihen 11 – 18	6 €
Plätze in der Loge	7,50 €

Bei Vorstellungsbeginn vor 15.00 Uhr: 10% Rabatt auf alle Plätze

Getränk 0,3l / 0,5l	1,50 € / 2 €
Popcorn klein / groß	2 € / 3 €
Gummibärchen	1,50 €
Schokoriegel	70 c

Es wird keine eng umrissene Aufgabe formuliert, sondern eine Situation beschrieben, die implizit Fragestellungen aufwirft wie z.B. „Für welche Plätze sollte man sich entscheiden?“, „Lohnt es sich, eine Vorstellung vor 15 Uhr zu besuchen?“, „Was möchten die Freunde konsumieren?“, „Wie teuer wird der Kinobesuch insgesamt bzw. pro Person?“, ... Dass hierbei das Rechnen mit Dezimalzahlen, mit Geldeinheiten und Prozenten geübt werden soll, erscheint fast nebensächlich.

Ein Beispiel aus der Analysis: Die Untersuchung von Funktionen muss nicht nach dem starren Raster der Kurvendiskussion erfolgen, sondern kann sehr offen angeregt werden:

Funktionen erforschen

Betrachte die Schar von Funktionen

$$f_a(x) = \sqrt{x(a-x)}$$

mit einem Parameter $a \in \boldsymbol{R}^+$.
Entdecke möglichst vielfältige Eigenschaften dieser Funktionenschar!

Es ist zunächst offen, was gemacht werden soll bzw. überhaupt gemacht werden kann. Wenn man sich aber etwas mit der Aufgabe beschäftigt, zeigt sich, dass sich hinter den Funktionen eine Schar von Halbkreisen verbirgt. Dies gilt es zu entdecken, zu beschreiben und zu beweisen!

Wir sind gewohnt, im Mathematikunterricht immer sehr detailliert nach dem zu fragen, was wir von unseren Schülern hören möchten. Klassischerweise würde ein Arbeitsauftrag zu dieser Funktion etwa lauten: „Untersuchen Sie den maxi-

malen Definitionsbereich, Monotonie, berechnen Sie die Ableitung, Extrema und zeichnen Sie den Graphen für a=2.“
Ich denke, wir sollten unsere Schüler aber auch durchaus an offenere Fragestellungen gewöhnen, denn schließlich sind die Probleme, die die Schüler in ihrem späteren Leben zu lösen haben, selten Folgen von Arbeitsanweisungen, die bis ins Kleinste definiert sind.

Ein Vergleich: In anderen Fächern sind offene Fragestellungen durchaus die Regel. Wenn es etwa in Geschichte heißt: „Erläutern Sie, wie Hitler an die Macht kam!“, genügt es nicht, zu sagen, „Er wurde vom Volk gewählt.“, sondern es ist ein komplexerer Zusammenhang möglichst umfassend darzustellen.
Wenn ein Schüler bei dieser Aufgabe nur die Definitionsmenge bestimmt und die Ableitung berechnet, aber nicht erkennt, dass es sich bei den Graphen um Halbkreise handelt, fehlt ein entscheidender Inhalt.

Auch das nächste Beispiel zur Bevölkerungsentwicklung beschreibt eine offene Situation, die zum Nachdenken und Diskutieren einlädt, die aber auch viel mathematisches Denken und Arbeiten anregen kann.

Die Entwicklung der Weltbevölkerung

Jahr	Bevölkerung in Mrd.
1900	1,65
1910	1,75
1920	1,86
1930	2,07
1940	2,30
1950	2,52
1960	3,02
1970	3,70
1980	4,44
1990	5,27
2000	6,06

Auf der Homepage der Vereinten Nationen (http://www.undp.org/popin) findet man unter anderem Informationen über die Entwicklung der Weltbevölkerung. Die Tabelle nebenan enthält dazu einige Daten.

a) Überlege dir zu dieser Thematik interessante Fragestellungen und versuche sie zu beantworten.

b) Informiere dich mit Hilfe des Internets über Bevölkerungsentwicklung, stelle deine Ergebnisse übersichtlich dar und präsentiere sie deinen Mitschülern.

Es wird auch hier keine eng umrissene Aufgabe formuliert, sondern eine Situation beschrieben, die Fragen aufwirft wie z.B.:

- Wie lassen sich die Daten graphisch übersichtlich darstellen?
  Welche Visualisierungsart ist dazu zweckmäßig?
- Wie wird sich die Weltbevölkerung weiterhin entwickeln?
  Wie viele Menschen leben in 50 Jahren auf der Erde?
- Wie hat sich die Bevölkerung in den vergangenen 2000 Jahren entwikkelt?
- Gibt es einen Funktionsterm, der diesen Zusammenhang beschreibt?

- Wie ist die Situation in Deutschland?
- . . .

Hier sind vielfältige Kompetenzen gefordert:
- Arbeiten mit Daten, Visualisieren von Zusammenhängen
- Arbeiten mit Funktionen, insbesondere mit Exponentialfunktionen
- Internetrecherche
- Präsentationstechniken

Diese Aufgabe ist bereits ein Beispiel für:

3. ARBEITEN IN SINNSTIFTENDEN KONTEXTEN

Schüler werden die Beschäftigung mit Mathematik im Allgemeinen nur dann als sinnvoll erleben, wenn sie spüren können, dass diese Mathematik auch außerhalb der Schule eine Bedeutung besitzt. Zudem werden abstrakte Inhalte leichter begreifbar und bleiben dauerhafter im Gedächtnis haften, wenn sie in realitätsbezogene Kontexte eingebettet sind.

Abwechslungsreiche Anwendungsaufgaben können aber auch zu einem tieferen Verständnis für mathematische Konzepte beitragen, nämlich immer dann, wenn man bei der Auseinandersetzung mit einer realen Situation an einen Punkt gelangt, an dem mathematische Methoden notwendig werden und gewinnbringend eingesetzt werden können.

Dazu ein Beispiel, das eine betriebswirtschaftliche Situation als Thema hat und zudem eine typische Arbeitsweise der Mathematik, die *Modellbildung*, aufzeigt:

Mathematik in der Betriebswirtschaft

Ein Unternehmen für Elektrogeräte stellt Computerbildschirme her. Werden pro Tag x Bildschirme produziert, so entstehen die Unkosten bzw. Ausgaben *A(x).*
Der Bereich für Mathematik der Forschungsabteilung des Unternehmens hat ermittelt, dass die Funktion

$$A(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}9x^2 + 300x + 18000$$

diese Ausgaben in Euro näherungsweise beschreibt.

Die Bildschirme werden zum Preis von 240 Euro pro Stück an die Händler verkauft. Beim Verkauf von x Geräten erzielt das Unternehmen die Einnahmen *E(x)* in Euro.

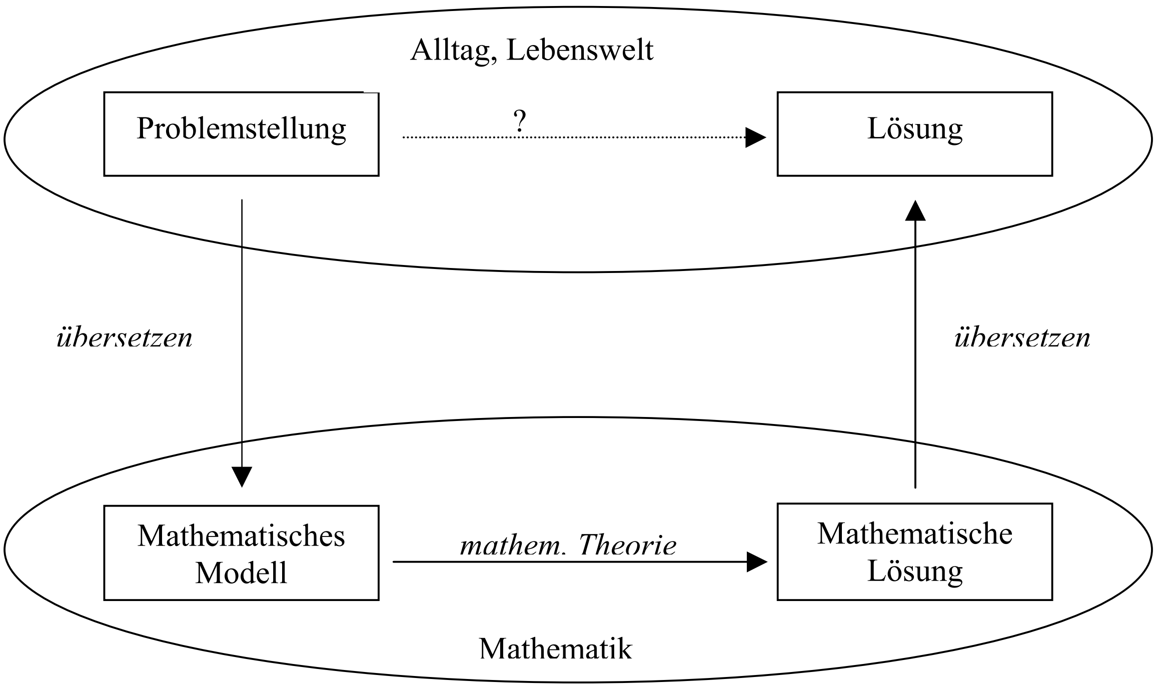
a) Stelle die Funktionen *A(x)* und *E(x)* graphisch dar und interpretiere ihren Verlauf.

b) Ermittle den Gewinn *G(x)*, den das Unternehmen mit der Herstellung und dem Verkauf von *x* Bildschirmen erzielt.
Deute den Verlauf des zugehörigen Graphen.

c) Die Leitung des Unternehmens ist vor allem an der substanziellen Frage interessiert, bei welcher Produktionsmenge der Gewinn maximal ist.
Ermittle hierfür über verschiedene Zugänge eine Lösung.

d) Rekapituliere die bisherigen Überlegungen vor dem Hintergrund des Begriffs der „Modellbildung“:

Bilden von Modellen in der Mathematik



e) Nimm Stellung zu folgender Aussage, die etwa mit Hilfe des Diagramms aus a) oder anhand des Terms *G(x)* in b) begründet werden kann:
„Das Unternehmen kann bei fester Produktionsmenge x einen beliebig hohen Gewinn erzielen, wenn es nur den Preis pro Bildschirm genügend hoch festsetzt.“

f) Wie hoch muss der Preis für einen Bildschirm mindestens sein, damit das Unternehmen überhaupt verlustfrei arbeiten kann?

Eine betriebswirtschaftliche Fragestellung wird in die Sprache der Mathematik übersetzt, mit Hilfe der mathematischen Theorie gelöst und die gewonnenen Ergebnisse werden in die Ausgangssituation zurücktransferiert. In Teilaufgabe e) wird deutlich, dass jedes Modell die Realität vereinfacht und damit Grenzen besitzt. Die letzte Aufgabe wendet sich hinsichtlich des Gedankengangs und der mathematischen Realisierung vor allem an leistungsfähigere Schüler, sie führt auf eine Gleichung 3. Grades.

Wir waren bei „sinnstiftenden Kontexten“. Noch ein Beispiel zum Thema „Steigung“ (auch sehr offen formuliert):

Welches Schild wird benötigt?

Das Profil einer Straße wird durch den Graphen der Funktion

$$f(x) = \frac{9}{x^2 + 9}\ , \qquad x \in [-8;\, 8]\,, \qquad \text{beschrieben.}$$

Skizziere das Straßenprofil.

Welches Verkehrsschild sollte hinsichtlich der Straßensteigung aufgestellt werden?

Hier muss man sich bewusst machen:

- Was bedeuten eigentlich diese Verkehrsschilder an Bergen?
- Was bedeutet etwa „20% Steigung“?
- Was hat das mit f ’ zu tun?
- Wo ist die Steigung maximal? *(Im Wendepunkt.)*

Im Beispiel „Mathematik in der Betriebswirtschaft“ war bereits der nächste Aspekt enthalten, nämlich:

4. Fächerverbindendes Arbeiten

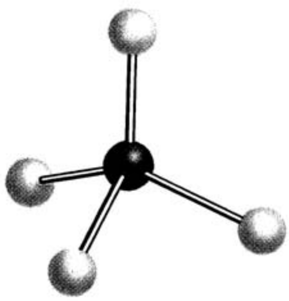
Die Beziehungen von Seiten der Mathematik zu anderen Fächern sind vielfältig. Nur dann kann Mathematik von Schülern als wertvoller Teil einer modernen Allgemeinbildung erfahren werden, wenn die Schüler – zumindest in Ansätzen – sehen können, welche Rolle die Mathematik im Geflecht der Wissenschaften besitzt. Die Bezüge existieren dabei nicht nur zum Standardbeispiel Physik, sondern auch etwa zur Biologie, Chemie, Geographie, Musik, Kunst oder den Wirtschaftswissenschaften.

Unter fächerübergreifendem Unterricht stellt man sich gerne ein Projekt vor, bei dem in Kooperation verschiedener Fächer ein Problem von verschiedenen Perspektiven aus bearbeitet wird. Dies ist am Gymnasium aufgrund des Fachlehrerprinzips allerdings organisatorisch aufwendig und wird in der Unterrichtspraxis eher selten stattfinden.
Nicht weniger erfolgversprechend erscheint der Weg, im Mathematikunterricht selbst fachübergreifende Fragestellungen zu entwickeln, also Problemstellungen, die auf Wissen aus anderen Fächern zurückgreifen und gleichzeitig die Leistungsfähigkeit wie auch die Grenzen der Mathematik sichtbar machen.

Hier zwei Beispiele für die Wechselwirkung zwischen Mathematik und Chemie:

Methan

Wie groß ist der Bindungswinkel im Methanmolekül?



Der Wert φ = 109° 28' steht in jedem Chemiebuch für die 10. Jahrgangsstufe. Die Schüler lernen diesen Wert im Chemieunterricht. Seine genaue Berechnung ($\cos\varphi = -\frac{1}{3}$) bedarf allerdings der mathematischen Modellierung und einiger geometrischer und trigonometrischer Überlegungen.

Geschwindigkeit chemischer Reaktionen

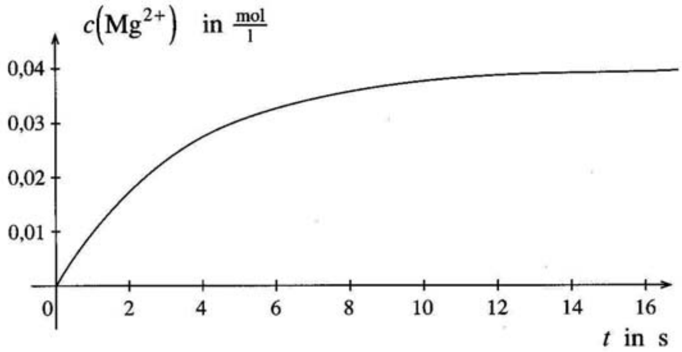
Chemische Reaktionen können unterschiedlich schnell verlaufen. Suche Beispiele für chemische Prozesse, die sehr schnell bzw. sehr langsam ablaufen.

Bringt man ein Stück elementares Magnesium in verdünnte Salzsäure, so entstehen dabei Wasserstoff und Magnesiumionen:

$$Mg + 2\,HCl \rightarrow H_2 + Mg^{2+} + 2\,Cl^{-}$$

Die Konzentration c der Mg^{2+}- Ionen ist das Verhältnis aus der Stoffmenge $n(Mg^{2+})$ und dem Volumen V der Lösung.

Ein Chemiker hat den zeitlichen Verlauf dieser Konzentration gemessen und folgende Messkurve erhalten:



a) Interpretiere diese Kurve!

b) Zur weiteren Auswertung seiner Messungen benötigt der Chemiker einen Funktionsterm, der diesen Graphen beschreibt. Versuche ihm zu helfen!

(Eine Möglichkeit: Du könntest in der Funktionenschar

$$f(t) = a \cdot b^t + c \quad , t \in R_0^+$$

nach einer günstigen Funktion suchen.
Welche Bedeutung besitzen dabei die Parameter $a,b,c \in R$?
Warum ist es sinnvoll, gerade in dieser Schar zu suchen?)

c) Erläutere anhand des Graphen die Begriffe der mittleren Reaktionsgeschwindigkeit in einem Zeitintervall sowie der momentanen Reaktionsgeschwindigkeit zu einem Zeitpunkt!

d) Ermittle die Reaktionsgeschwindigkeit zu den Zeitpunkten 0s, 4s und 8s.

e) Wie hängt die momentane Reaktionsgeschwindigkeit von der Zeit ab?

f) Wie hängt das Volumen des bei der Reaktion während einer Sekunde entstehenden Wasserstoffs von der Zeit ab?

g) Wie verändert sich die obige Kurve, wenn man
- die Konzentration der Salzsäure erhöht
- mehr Magnesium reagieren lässt
- das Magnesium fein zermahlen zur Salzsäure gibt
- die Reaktion bei höherer Temperatur ablaufen lässt?

5. Aufgaben als Problemkeime – Variation von Aufgabenstellungen

Das Beschäftigen mit Aufgaben läuft in der gängigen Unterrichtspraxis oft derart ab, dass die in den Schulbüchern zu findenden „Aufgabenplantagen" Nummer für Nummer abgearbeitet werden. Ist das Rechenergebnis ermittelt, wird zur nächsten Ausgabe weitergegangen. Sicher ist dies zum „Einschleifen" von Rechenroutinen notwendig. Problematisch wird es nur, wenn derart kurzfristige Auseinandersetzungen mit Aufgabenstellungen im Mathematikunterricht dominieren. Die Unterrichtspraxis zeigt, dass das so erworbene Wissen wenig langfristige Wirkung besitzt und zudem in Transfersituationen kaum gewinnbringend nutzbar ist.
An die Stelle des bloßen Abarbeitens von Aufgaben muss ein intensives Beschäftigen mit Problemkontexten treten. Dies kann etwa dadurch initiiert werden, dass nach der Ergebnisfindung regelmäßig Fragen gestellt werden wie:

- Was war das Kernproblem der Aufgabe?
- Welche Strategien haben wir verfolgt?
- Wie lässt sich das Ergebnis zusammenfassen?
- Welche Bedeutung und welche Konsequenzen hat das Resultat?
- Wie lässt sich die Aufgabe in unser bisheriges Wissen einordnen?
- Was sollte man sich merken?
- Gibt es alternative Lösungswege?
- Wie lässt sich die Aufgabenstellung erweitern, verallgemeinern, variieren?

Zum letzen Aspekt:
Eine bewährte Strategie, um neue (nicht nur) mathematische Erkenntnisse zu gewinnen, ist es, von Bekanntem auszugehen, dies zu variieren und zu prüfen, ob sich in der veränderten Situation interessante Dinge ergeben. Im Mathematikunterricht können etwa bekannte Sachverhalte oder herkömmliche Schulbuchaufgaben als Keime für eine Vielfalt von Variationen dienen, ein Aspekt, den Prof. Schupp von der Universität Saarbrücken in den letzten Jahren immer wieder hervorgehoben hat (siehe Literaturverzeichnis). Zunächst zwei Beispiele:

Rechtecke und Zylinder mit Variation

a) Diskutiere die Funktion $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}, \quad x \in \boldsymbol{R}$.

b) In die Fläche zwischen dem Graphen von f und der x-Achse werden Rechtecke gezeichnet, die zur y-Achse symmetrisch sind.
Wie hängt der Flächeninhalt dieser Rechtecke von ihrer Form ab?
Welches Rechteck hat die größte Fläche?

Es gibt ein größtes Rechteck, nämlich gerade das gezeichnete mit der Breite 2.
Man kann die Aufgabe ins Dreidimensionale erweitern:

c) Wenn die Rechtecke aus b) um die y-Achse rotieren, entstehen Zylinder.
Wie verändert sich das Volumen dieser Zylinder mit ihrer Form?
Welcher Zylinder hat das größte Volumen?

Hier gibt es keinen größten Zylinder! Mit zunehmendem Durchmesser wächst das Volumen der Zylinder streng monoton zwischen 0 und π. Bis hierher könnte die Aufgabe in jedem Analysisbuch für die Oberstufe stehen. Nun zu Variationen:

d) Variiere deine Überlegungen aus a) – c), indem du etwa
- eine andere Funktion f wählst
- Dreiecke statt Rechtecke betrachtest
- die Figuren um die x-Achse rotieren lässt
- ...

Bei der Wahl einer anderen Funktion kann die Situation ganz anders aussehen. Wählt man etwa $f(x) = \frac{1}{x}$, haben alle Rechtecke die gleiche Fläche, das Volumen der Zylinder ist direkt proportional zum Durchmesser.

Man könnte bei der gegebenen Funktion den Exponenten von x variieren und etwa $f(x) = \dfrac{1}{x^4+1}$ betrachten. Der Graph der Funktion sieht dann ähnlich aus, es gibt ein maximales Rechteck und einen maximalen Zylinder, wobei der größte Zylinder aber natürlich nicht dadurch entsteht, dass das größte Rechteck rotiert.

Man könnte als Funktion die Cosinusfunktion betrachten. Dann stößt man auf trigonometrische Gleichungen, zu deren Lösung Näherungsverfahren nötig sind.

Ein zweites Beispiel für niedrigere Jahrgangsstufen:

Variationen

„Ein Viereck mit vier rechten Winkeln ist ein Rechteck.“

Variiere diesen Satz in möglichst vielfältiger Hinsicht und stelle auf diese Weise neue wahre Aussagen auf.

Was möchte ich damit demonstrieren?
Es geht jeweils darum, jeden der tragenden Begriffe einer bekannten Aussage oder einer vorgegebenen Aufgabe zu variieren. Hier sind mathematische Phantasie und mathematisches Vorwissen gleichermaßen gefragt! Die Ideen sind zu ordnen, zu bewerten und auf ihre Machbarkeit hin zu untersuchen. Manche Variationen werden sich als nicht sinnvoll, falsch oder zu schwierig erweisen.

Auf diese Weise ergeben sich selbstgestellte Probleme, die der ursprünglichen Aufgabe entwachsen sind und diese in vielfältige Richtungen weiterführen. Zum Lösen eines solchen Problembündels kann sich arbeitsteiliges Vorgehen anbieten. Einen sinnvollen Abschluss erhält eine Unterrichtseinheit dieser Art allerdings erst dann, wenn die Ergebnisse zusammenfassend dargestellt und gewertet und dabei exemplarisch Strategien mathematischen Arbeitens verdeutlicht werden.

Wenn man ein Problemfeld in dieser Weise von vielen verschiedenen Seiten beleuchtet und durchdringt, vielfältige Bezüge zum eigenen Vorwissen schafft, lernt man sicher mehr an mathematischem Denken und an kreativem Umgang mit Mathematik, als durch Abarbeiten voneinander isolierter, kurzschrittig formulierter Aufgabenstellungen.

6. AUFGABEN MIT VIELFÄLTIGEN ZUGANGSWEISEN

Schüler sind oftmals gewohnt, bei Problemstellungen im Mathematikunterricht genau die Lösungsverfahren einzusetzen, die sich aus der aktuell behandelten Unterrichtssequenz ergeben. Sie scheuen sich, über Lösungsvarianten nachzudenken oder nach evtl. einfacheren Strategien zu suchen. Dabei muss fairerweise bemerkt werden, dass die Aufgabenstellungen, mit denen sich die Schüler (auch in Leistungserhebungen) in der Regel konfrontiert sehen, solch ein Verhalten eher fördern bzw. sogar hervorrufen.
Dem können Aufgaben entgegenwirken, deren Formulierung keinen speziellen Lösungsweg andeutet, die aber eine Vielfalt methodischer Zugangsweisen geradezu anbieten.
Hier ein Beispiel, das Zugänge auf sehr unterschiedlichen Niveaus zulässt:

Rechtecke

Betrachte Rechtecke mit festem Umfang (z.B. $U = 18$ cm).
Wie hängt der Flächeninhalt dieser Rechtecke von deren Form ab?

Diskutiere hierüber mit deinen Nachbarn und stelle deine Überlegungen und Ergebnisse übersichtlich dar!

Es bieten sich vielfältige Zugänge auf unterschiedlichen Niveaus an: Man könnte Rechtecke zeichnen und rein geometrisch argumentieren, oder konkrete Messergebnisse in einer Tabelle darstellen und sich dem Problem numerisch nähern. Es bietet sich die Möglichkeit, die quadratische Abhängigkeit der Fläche von der Rechtecksbreite zu untersuchen und die zugehörige Parabel auf 9. Klassniveau zu diskutieren, und schließlich lässt sich die Aufgabe auch als Extremwertproblem mit dem Ableitungsbegriff behandeln.
Gerade die Entwicklung und der wertende Vergleich verschiedenartigster Lösungsstrategien können vielfältige Bezüge innerhalb des mathematischen Wissens der Schüler schaffen und gleichzeitig demonstrieren, wie die verfügbaren mathematischen Werkzeuge gewinnbringend eingesetzt werden können.

Ich habe diese Aufgabe in einer 11. Klasse gestellt. Nur wenige Schüler haben diesen funktionalen Zusammenhang von sich aus vollständig in den Griff bekommen (denn hier heißt es „Form“ und nicht „Breite“), und nur wenige Schüler haben daran gedacht, hier eine Funktion zu diskutieren. Erstaunlich viele Lösungen haben sich auf einem Niveau bewegt, wie es 6.-Klässer auch haben.

(Anmerkung: Diese Aufgabe eignet sich natürlich auch ausgezeichnet zum Variieren. Statt Rechtecken kann man Dreiecke, Parallelogramme, *n*-Ecke, Quader, Pyramiden, ... betrachten. Es ist jeweils zu prüfen, welche weitere Größe sinnvollerweise konstant gehalten werden soll.)

Ein Beispiel zur Kreisfläche:

Kreisfläche

Welchen Flächeninhalt besitzt ein Kreis mit dem Durchmesser 10 cm?

Überlege dir mit deinen Nachbarn vielfältige Wege zur Lösung dieses Problems und vergleiche sie!

Natürlich ist diese Aufgabenstellung nur sinnvoll, wenn die Schüler die Formel $A = r^2\pi$ noch nicht kennen. Man könnte etwa Kreise auf kariertes Papier (auch Millimeterpapier) zeichnen und Kästchen systematisch zählen, Kreise aus Holz aussägen und wiegen, Quadrate oder Vielecke ein- und umbeschreiben und Mittelwerte bilden, etc.

Noch ein drittes Beispiel zu „Aufgaben mit vielfältigen Zugangsweisen“:

Ungleichung von Bernoulli

1) Zeige, dass für alle $x \in\ ]-1; \infty[$ gilt:
   a) $(1+x)^2 \geq 1+2x$
   b) $\dfrac{1}{1+x} \geq 1-x$
   c) $\sqrt{1+x} \leq 1+\frac{1}{2}x$

   Versuche, jeweils möglichst verschiedenartige Lösungswege zu finden.

2) Beweise die Ungleichung von Jakob Bernoulli:
   Für $n \in \mathbf{N}$ und $x \in [-1; \infty[$ gilt:
   $$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

3) Informiere dich über Jakob Bernoulli sowie über weitere berühmt gewordene Persönlichkeiten aus seiner Familie!

4) Verallgemeinere die Resultate aus 1) und 2) zu einer Aussage für beliebige reelle Exponenten und beweise diese!

Sehen wir uns exemplarisch die erste Ungleichung an:

- Man könnte rein algebraisch argumentieren: Klammern ausmultiplizieren (mit der binomischen Formel) und die beiden Seiten vergleichen
- Man kann beide Seiten als Funktionsterme auffassen, die Graphen zeichnen und begründen, warum der eine Graph stets über dem anderen verläuft.
- Man könnte die Differenzfunktion betrachten (linke Seite – rechte Seite) und zeigen, dass diese keine negativen Werte annimmt.
- Man kann geometrisch argumentieren und den Term $(1+x)^2$ als Flächeninhalt eines Quadrats interpretieren. Die Terme 1 und 2x finden sich als Teilflächen dieses Quadrats wieder.

Das Problem erlaubt damit mehrere völlig unterschiedliche Zugangsweisen: mit Algebra, Analysis oder Geometrie. Vor allem das Konzept mit Hilfe der Analysis erweist sich als besonders leistungsstark, wenn es in 2) und 4) um Verallgemeinerungen dieser drei Ungleichungen geht.

Die Verallgemeinerung für natürliche Exponenten ist die Ungleichung von Bernoulli. Wenn schon der Name Bernoulli fällt, bietet sich der Auftrag 3) etwa als Referatsthema an.

Man stößt im Mathematikunterricht immer wieder auf Inhalte, die mit bedeutenden Mathematikern in Bezug gesetzt werden können. (Etwa in der Differentialrechnung oder bei den vielen Sätze der Geometrie, die nach Mathematikern benannt sind.) Es wäre schade, wenn sich solche Anknüpfungspunkte nur darauf beschränken, dass das jeweilige Geburts- und Todesjahr mitgeteilt wird. Im Unterricht sollte auch deutlich werden, dass die Mathematik, die wir heutzutage den Schülern präsentieren, ein Ergebnis einer jahrtausendelangen, oft mühsamen Entwicklung, ein Produkt menschlichen Kulturschaffens ist.
Zudem sind historische Exkurse auch in bestem Maße allgemeinbildend. Denn genauso wie man von einem gebildeten Menschen erwartet, dass er berühmte Maler oder Musiker einordnen kann, sollte man auch erwarten können, dass ihm bedeutende Mathematiker nicht völlig fremd sind. Als Ort für derartigen Wissenserwerb kommt wohl nur der Mathematikunterricht in der Schule in Betracht.

(Ergebnis zu 4.: $(1+x)^r \geq 1+rx \;\; \mathit{für} \;\; r \leq 0 \vee r \geq 1;$ $\quad (1+x)^r \leq 1+rx \;\; \mathit{für} \;\; 0 \leq r \leq 1$)

Aufgaben mit vielfältigen Zugangsweisen sind auch immer Aufgaben, bei denen das Vorwissen der Schüler auf unterschiedliche Art und Weise und auf unterschiedlichem Niveau einfließen kann. Damit sind wir beim Aspekt des *kumulativen Lernens* bzw. des *Sicherns von Basiswissen.*

7. Sicherung von Basiswissen – Kumulatives Lernen

Es wird vielfach beklagt und durch aktuelle Leistungsstudien nachgewiesen, dass die Schüler – gerade in Mathematik – im Allgemeinen nur über ein geringes Basiswissen und über unzureichend ausgeprägte Grundfertigkeiten verfügen. Das Lernen bleibt oft oberflächlich und beschränkt sich weitgehend auf das Einprägen von Fakten und das Trainieren von Routinen. Es gelingt momentan nicht in zufrieden stellendem Maße, bei den Schülern in den vielen Jahren Mathematikunterricht ein solides, gut vernetztes Wissensfundament aufzubauen, das in vielfältigen Situationen flexibel nutzbar und erweiterbar ist.

Ein Schüler kann aber nur dann ein solides Grundwissen aufbauen, wenn der Unterricht entsprechend organisiert ist, wenn im Mathematikunterricht kontinuierlich und systematisch neue Inhalt mit früherem Stoff vernetzt werden und letzterer dadurch regelmäßig aus dem konkreten Unterrichtszusammenhang heraus wiederholt wird. Die Schüler sollen erfahren, wie die Lerninhalte aufeinander aufbauen und dass nur auf der Basis bisherigen Wissens ein Verständnis komplexerer Sachverhalte möglich ist.
Es ist hier die Aufgabe der Lehrkraft, vertikale Verknüpfungen zwischen früheren, aktuellen und evtl. künftigen Inhalten herzustellen, damit beim Schüler keine voneinander isolierten Wissensinseln entstehen.

Einem solchen kumulativen Lernen können etwa Aufgaben dienen, die dem aktuellen Stoff entspringen, ihn weiterführen, zu deren Bearbeitung aber Bezüge zu früheren Inhalten notwendig sind. Hierzu ein Beispiel für die Oberstufe:

Papiertrichter

Aus einem kreisrunden Stück Papier wird ein Sektor herausgeschnitten und dieser so gefaltet, dass ein kegelförmiger Trichter entsteht.

Wie hängt die Form des Trichters von der Gestalt des Papiersektors ab?
Für welchen Sektor hat der Trichter das größte Volumen?

Es handelt sich hier um ein Extremwertproblem; es genügt aber nicht, nur die Volumenformel für Kegel aus der Formelsammlung zu suchen und diese zu differenzieren, sondern es bedarf einer genauen Vorstellung, wie die Gestalt des Kegels mit der Form seiner Mantelfläche zusammenhängt.

(Als Ergebnis erhält man hier, dass der Mittelpunktswinkel des Sektors etwa 294° betragen muss $(\sqrt{2/3}\cdot 360°)$. *Beim zugehörigen Kegel ist der Radius des Grundkreises dann* $\sqrt{2}$ *-mal so groß wie die Höhe.)*

Ein zweites Beispiel, das sich in die Thematik „Steigungen“ einordnen lässt:

Ein Weg um das Parkhaus

Ein Parkhaus besitzt die Gestalt eines Zylinders. Es ist 25 m hoch und hat einen Durchmesser von 30 m.
Ein Zugangsweg soll in Form einer gleichmäßig ansteigenden Wendelstrecke rings um das Parkhaus geführt werden, so dass alle Parkdecks erreichbar sind. Damit er auch für Rollstuhlfahrer geeignet ist, darf er maximal 6% Steigung besitzen.

Plane einen möglichen Verlauf des Weges!
Wie lang wird er?

Hier müssen die Schüler viel Vorwissen aktivieren (zu den Themen „Steigung“, „Prozent“, „Zylinder“, „Kreis“, ...).

Derartige Wiederholungen sind im Einzelfall immer punktuell und exemplarisch. Wenn sie aber regelmäßig stattfinden, können sie eine tiefe Systematik erhalten.

Nun noch einmal zusammenfassend zum Aspekt des eigenverantwortlichen Arbeitens, einem zentralen Begriff der Schulentwicklung:

8. EIGENVERANTWORTLICHES ARBEITEN

> "The best way to learn is to do – to ask, and to do.
> The best way to teach is to make students ask, and do.
> Don't preach facts – stimulate acts."

Dieser Appell des amerikanischen Mathematikers Paul HALMOS wendet sich nicht gegen einen vom Lehrer geleiteten Unterricht, sondern gegen einen Unterricht, der die Schüler zur Passivität verurteilt.

Das kleinschrittige, fragend-entwickelnde Unterrichtsgespräch, vom Lehrer anhand der Fachsystematik zeitökonomisch auf das Unterrichtsziel hin geführt, besitzt in manchen Situationen sehr wohl Berechtigung. Problematisch ist es nur, wenn ein derartiger Unterrichtsstil im Mathematikunterricht generell dominiert, wenn im gängigen „Frage-Antwort-Spiel" regelmäßig anspruchsvolle und komplexe Problemstellungen in knappe Fragen und primitive Antworten portioniert und häppchenweise den Schülern serviert werden. Dies schränkt die geistige Beweglichkeit und Eigenständigkeit der Schüler ein und behindert einen effektiven, individuellen Aufbau von vernetztem Wissen. Den Schülern gibt man zu selten die Freiheit, eigene Wege auszuprobieren. Auf Schülerseite führt dies zu Bequemlichkeit und Trägheit (denn der Lehrer macht ja alles) sowie zu Unselbständigkeit und Hilflosigkeit bei ungewohnten oder größeren Problemen. („Das haben wir noch nicht gemacht!", „Kann ich nicht!")

Deshalb sind Unterrichtsformen notwendig, die dem Schüler schrittweise eine erhöhte Verantwortung zuweisen und ihm eine stärkere Selbstorganisation abverlangen. Sukzessive müssen die Schüler die Bereitschaft erlernen, Herausforderungen anzunehmen und eigenständig anzupacken.
Die Möglichkeiten, Phasen eigenverantwortlichen Arbeitens in den Unterricht zu integrieren sind vielfältig. Großformen eigenverantwortlichen Arbeitens sind natürlich Unterrichtsprojekte und Lernzirkel. Diese werden angesichts der schulischen Rahmenbedingungen allerdings wohl kaum den Hauptteil der Unterrichtsarbeit ausmachen. Zudem setzen sie bei den Schülern bereits ein gerüttelt Maß an Selbststeuerungs- und Methodenkompetenz voraus, das erst im Kleinen erarbeitet werden muss.
Es kommt vielmehr darauf an, dass im alltäglichen Mathematikunterricht viele kleine *Arbeitsinseln* des eigenverantwortlichen Lernens geschaffen werden, die den Schülern Freiräume bieten, um selbständig das zu tun, was traditionellerweise unter enger Führung des Lehrers geschieht.

Alle bisher vorgestellten Aufgaben würden sich für einen derartigen Einsatz im Unterricht eignen. Als weiteres Beispiel noch eine Folge von Arbeitsaufträgen, die dazu dienen kann, die Schüler den Satz über die Winkelsumme im Dreieck selbständig und kooperativ entdecken zu lassen:

Winkel im Dreieck

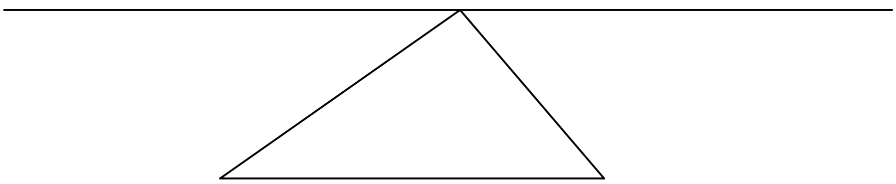
a) Zeichne verschiedene Dreiecke, miss jeweils die Innenwinkel und berechne ihre Summe. Diskutiere über deine Ergebnisse mit deinem Nachbarn.

b) Schneide ein Dreieck aus Papier aus und zerreiße es so, dass du die drei Innenwinkel aneinander legen kannst.

c) Formuliere ausgehend von deinen Beobachtungen eine Vermutung!

d) Begründe deine Vermutung!

Ein möglicher Weg: Argumentiere mit Hilfe der folgenden Skizze:



e) Erkläre deine Überlegungen deinem Nachbarn.

f) Arbeite mit deinem Nachbarn gemeinsam euere Ergebnisse so aus, dass ihr sie zu zweit im Klassenteam eueren Mitschülern vorstellen könnt.

Man wird zu Recht sagen: Das ist ja nichts Neues! Nur: Es macht einen großen Unterschied, ob der Lehrer in solche einer Unterrichtsphase die Schüler Schritt für Schritt führt, oder ob sie mit dem Thema `mal für eine halbe Stunde allein gelassen werden.
Das gängige „Andiskutieren" eines Problems samt seiner Lösung, bei dem der Lehrer – gestützt auf die mündlichen Beiträge der „Zugpferde" einer Klasse – die Aufgabe vorschnell erläutert und strukturiert, das Problem diskutiert und Lösungswege aufzeigt, verkennt, dass die Schüler Zeit und Ruhe bräuchten, um derartiges selbst zu leisten. Und es betrügt den Großteil der Schüler um die vielfältigen Lernmöglichkeiten, die von einer Aufgabe ausgehen können. Es verhindert die Entwicklung von Problemlösekompetenz und von tragfähigem Wissen, von Selbständigkeit und letztendlich von Vertrauen in die eigenen mathematischen Fähigkeiten.

Am Ende einer derartigen Unterrichtssequenz muss natürlich eine Zusammenfassung im Klassenplenum stehen. Dies kann etwa im Rahmen einer Präsentation der Schülerergebnisse geschehen und zu einen zusammenfassenden Hefteintrag führen.

Bei diesen letzten Aufträgen e) und f) war explizit die Kooperation und Kommunikation der Schüler untereinander gefordert, Begriffe die auch im Rahmen der Schulentwicklung zentral sind. Klippert spricht dezidiert von Kommunikationstraining und Teamentwicklung.

9. KOOPERATION UND KOMMUNIKATION

Es wird vielfach beklagt, dass zahlreiche Schüler nur über unzureichende sprachliche Ausdrucksfähigkeit und mangelnde Gesprächsdisziplin verfügen. Die Klagen beziehen sich etwa auf verbale Passivität, auf Unterrichtsbeiträge in Form wenig durchdachter, zusammenhangsloser Satzfragmente, auf mangelnde Sicherheit im Umgang mit den Fachsprachen oder auf die unzureichende Fähigkeit der Schüler, sich gegenseitig zuzuhören und aufeinander einzugehen.
Es scheint vor allem folgender Effekt für die beklagten Defizite verantwortlich zu sein: Ein Unterricht, in dem der Lehrer den Ablauf und die Struktur weitgehend vorgibt und dabei den Großteil aller Sprechanteile selbst übernimmt, erlaubt zurückhaltenden, unsicheren Schülern, sich zurückzuziehen und das Unterrichtsgeschehen passiv zu verfolgen. Der Lehrer und die Aktivisten in der Klasse sorgen schon dafür, dass jede Stunde ein „Erfolg“ wird.

Durch derartige Passivität verkümmern einerseits die bei Fünftklässern noch vorhandene Freude am eigenen Unterrichtsbeitrag und der notwendige Mut dazu. Andererseits vergeben die Schüler aber auch Stunde für Stunde Chancen, neue Gesprächskompetenzen aufzubauen. Sprechen lernt man eben nur, indem man selbst spricht. Wo sollen die Schüler denn ein elaboriertes Sprachniveau, wie es die Auseinandersetzung mit den schulischen Fachdisziplinen und den behandelten Thematiken erfordert, sonst erwerben, wenn nicht in der Schule? Natürlich besitzen das Elternhaus und die Familie bei der Sprachentwicklung eine fundamentale Bedeutung. Aber für das Sprechen in und vor einer größeren Gruppe, das Sprechen über abstrakte Themen, die nicht dem unmittelbaren Erfahrungsfeld entstammen, und die Einführung in zahlreiche Fachsprachen ist doch die Schule der maßgebliche Ort.

Dass sich diesbezügliche Anstrengungen lohnen, ist wohl unstrittig. Schließlich sind kommunikative Kompetenzen nicht nur für die Schule von Bedeutung. Sie sind entscheidend für die Entwicklung von Selbstbewusstsein und Selbstvertrauen sowie grundlegende Voraussetzungen für angemessene Partizipation in der Gesellschaft und nicht zuletzt für beruflichen Erfolg.
Wir müssen unseren Schülern also auch im Mathematikunterricht immer wieder Gelegenheit geben, zu sprechen und dabei auch komplexere Sachverhalte darzustellen.

Das folgende Beispiel zeigt, wie sich kommunikatives Lernen im Mathematikunterricht initiieren lässt. Es geht dabei um einen Weg, wie die Flächeninhaltsformel für Trapeze erarbeitet werden kann:

Spezielle Vierecke

a) Zeichne verschiedenartige Vierecke, bei denen zwei der vier Seiten zueinander parallel sind.

b) Erfinde einen Namen für solche Vierecke.

c) Bestimme den Flächeninhalt der von dir gezeichneten Vierecke.

d) Entwickle eine allgemeine Methode, wie sich der Flächeninhalt solcher Vierecke möglichst einfach berechnen lässt.

e) Erkläre deine bisherigen Überlegungen deinem Nachbarn. Diskutiert gemeinsam über euere Ergebnisse.

f) Arbeitet eure Resultate gemeinsam so aus, dass ihr sie im Klassenplenum eueren Mitschülern präsentieren könnt.

g) Stellt euere Überlegungen und Ergebnisse im Klassenteam eueren Mitschülern vor. Ordnet auch die Präsentationen der anderen Gruppen in euere Arbeit ein.

Diese Aufgabenstellung ist nach dem Dreischritt „Ich, Du, Wir“ strukturiert, der auf die beiden Schweizer Didaktiker Gallin und Ruf zurückgeht. Hier ein Überblick über die Kernidee:

ICH: Individuelles Arbeiten Jeder einzelne Schüler macht sich eigenständig mit einer Thematik oder Problemstellung vertraut, stellt Bezüge zum eigenen Ich, zum individuellen Vorwissen her und geht eigene Schritte in Richtung einer Lösung.
DU: Lernen mit einem Partner Jeder Schüler tauscht sich mit einem Partner aus, erklärt seine Ideen, vollzieht die Gedanken des anderen nach und dringt so tiefer in das Themengebiet ein. In Partnerarbeit wird weiter an der Problemlösung gearbeitet.
WIR: Kommunikation im Klassenteam Die Resultate der Arbeitsgruppen werden im Klassenplenum präsentiert und diskutiert. Aus den Beiträgen aller wird ein gemeinsames Ergebnis erarbeitet.

Dieses Phasenschema zeigt einen Weg auf, wie das Lernen und Arbeiten im Mathematikunterricht organisiert und strukturiert werden kann, um individuelle Lernprozesse möglichst wirksam anzuregen und gleichzeitig kommunikative und soziale Kompetenzen nachhaltig zu schulen.

Hinter diesem Konzept steht die Idee, dass Lernen ein individueller, konstruktiver Prozess ist. Er ist von außen nur bedingt steuerbar. Der eigentliche Lernprozess läuft im Innern jedes Einzelnen ab, indem dieser sein eigenes persönliches „Denk-Netz“ knüpft.

In der Ich-Phase (Teil a-d) geht es zunächst darum, die Aufgabenstellung zu erschließen und zu verstehen, sich zu orientieren und ein Gefühl dafür zu entwikkeln, worum es geht und was die Aufgabe von einem verlangt. Als weiteres ist die Thematik in das persönliche Vorwissen einzuordnen, Strategien und Lösungsideen sind zu entwickeln und schließlich umzusetzen.
Die Analyse dieser Orientierungsprozesse zeigt, dass es sich hierbei um zutiefst individuelle Vorgänge handelt. Jeder Schüler besitzt ein individuelles Vorwissen, eigene Denkmuster und Problemlösestrategien und ein eigenes Tempo bei diesen Verarbeitungsvorgängen. Deshalb erscheint es sinnvoll und zweckmäßig zugleich, diese Phasen jeden Schüler individuell im Rahmen einer Einzelarbeit durchlaufen und durchleben zu lassen. Ein enges Führen durch den Lehrer täuscht über viele Probleme, die ein Einzelner hat, hinweg!

Danach steht die Kooperation mit dem Nachbarn, dem „Du“, im Mittelpunkt. (Bei großen Klassen sind auch Arbeitgruppen von drei bis vier Schülern denkbar.) Die Schüler sind gefordert, ihre Ideen und Ergebnisse sprachlich verständlich auszudrücken und umgekehrt auf die Gedanken des anderen einzugehen.
Ein derartiger Austausch begünstigt fachliches Lernen in zweierlei Hinsicht. Einerseits führt das aktive Kommunizieren zu einer weiteren Durchdringung des Stoffes, andererseits kann der Nachbar als helfende Instanz wirken, wenn es darum geht, Verständnisfehler zu klären, Grundlagenwissen zu aktivieren, weitere Ideen zu entwickeln und auftretende Probleme zu bewältigen.
Ein derart kooperatives Arbeiten unterstützt aber auch den Aufbau sozialer Kompetenzen, indem es Schüler dazu veranlasst, einander zuzuhören, zusammenzuarbeiten, sich wechselseitig zu helfen und zu unterstützen, miteinander zu diskutieren, mit diskrepanten Ansichten umzugehen und Kompromisse zu schließen.

In der „Wir“-Phase findet zweierlei statt: Zum einen stellen die Schülerarbeitsgruppen ihre Überlegungen und Ergebnisse im Klassenplenum vor, zum anderen wird unter der fachkundigen Moderation des Lehrers eine gemeinsame Lösung entwickelt, die die Schülerresultate vereint, ggf. noch erweitert und in den fachlichen und stofflichen Kontext einbettet.
Ein derartiger Gedankenaustausch in Form von Kurzreferaten der Arbeitsgruppen erscheint in vielerlei Hinsicht sinnvoll und wertvoll:

- Auf den ersten Blick steht der **inhaltliche Austausch** der erarbeiteten Ergebnisse im Vordergrund. Die Schüler präsentieren ihre Überlegungen im Klassenplenum bzw. vollziehen die Ideen anderer nach. Dabei zeigt sich, dass die Kreativität der gesamten Klasse als Gruppe in der Regel weitaus größer ist als die eines Einzelnen. Natürlich müssen hierzu die zugrunde liegenden Aufgabenstellungen genügend offen formuliert sein und vielfältige Lösungswege zulassen.

- Zweitens wird das **freie Sprechen** nachhaltig gefördert. Viele Schüler, die nicht gerne im Klassenplenum sprechen, haben in erster Linie Angst vor dem Scheitern, sie ziehen sich lieber zurück und schweigen. Sie befürchten, sich vor dem Lehrer und den Mitschülern zu blamieren, oder fürchten deren Kritik. Um derartige Ängste abzubauen, ist es einerseits notwendig, in der Klasse ein Gemeinschaftsgefühl und ein Gefühl des gegenseitigen Vertrauens aufzubauen. Andererseits ist es aber auch geboten, im Rahmen des Unterrichtsverlaufs regelmäßig Situationen zu schaffen, die die Schüler gezielt zu Erfolgserlebnissen beim freien Sprechen führen.

- Die Gefahr des „Scheiterns“ beim Vortrag verringert sich, wenn die kooperativ erarbeiteten Resultate nicht von einem Einzelnen vorgetragen, sondern **gemeinschaftlich präsentiert** werden. Dies erscheint hinsichtlich der Arbeitsbelastung der Einzelnen nur gerecht und erfordert auch bei der Vorbereitung und Ausarbeitung der Ergebnispräsentation intensiven Gedankenaustausch und fruchtbare Zusammenarbeit. Schließlich sollte der Einzelne nicht um das Gefühl betrogen werden, für das Ergebnis mitverantwortlich zu sein und damit Erfolge auch als persönliche Erfolge verbuchen zu dürfen.

- Des Weiteren wird man nicht davon ausgehen können, dass die Kurzreferate der Schüler hinsichtlich der Darstellung, der Präsentation und der Verständlichkeit stets perfekt sind. Dies muss aber nicht unbedingt ein Manko sein. Schließlich müssen die Schüler das Darstellen mathematischer Inhalte erst lernen. Wie soll denn dieses Lernen vonstatten gehen, wenn nicht an konkreten Beispielen?
Wenn derartige Aspekte jeweils rücksichtsvoll besprochen werden, z.B. durch die regelmäßig gestellte Routinefrage „Was war gut, was hätte man besser machen können?“, wird Kritik nicht verletzend wirken, sondern helfen, Präsentations- und Visualisierungsfertigkeiten bei allen Schülern kontinuierlich zu steigern.

- Die Wir-Phase bietet also einen guten Rahmen, um **aus Fehlern** anderer zu **lernen.** Wenn die Schüler im Mathematikunterricht engagiert sind, dann machen sie natürlich auch Fehler, sie ziehen falsche Schlüsse, gehen Irrwege. Aus Fehlern kann man lernen. Dies klingt wie eine Binsenweisheit, aber es setzt voraus, dass Fehler erlaubt sind und auch tatsächlich Platz im Unterricht haben. Es setzt aber vor allem voraus, dass Schüler ohne Angst vor schlechten Noten oder Spott und Gelächter von Seiten der Mitschüler sich trauen, Fehler zu äußern.
Fehler und Fehlvorstellungen eines Einzelnen sollten gemeinsam rücksichtsvoll und sensibel so thematisiert und durchleuchtet werden, dass sie für alle Schüler lehrreich sind, ohne den Einzelnen bloßzustellen. Eine solche Fehlerarbeit be-

darf natürlich einiger Übung in der Klasse, wenn sie aber zur Routine wird, erweist sie sich als ausgesprochen wirkungsvoll.

Haben die Schüler einen neuartigen Problem- bzw. Gedankenkreis auf eigenen Wegen intensiv erkundet, kann der Dreischritt „Ich, Du, Wir“ zu einem Abschluss gebracht werden, indem die Schülerresultate zu einem Gesamtergebnis zusammengefasst bzw. erweitert werden. Die Schüler sind dann „reif“ für eine fundierte Ergebnissicherung, die mathematische Konventionen, den stofflichen Rahmen und curriculare Vorgaben berücksichtigt.

Ein letztes Beispiel soll demonstrieren, wie einfach es ist, aus einer Aufgabe eine „Ich-Du-Wir-Aufgabe“ zu machen. Betrachten wir dazu nochmals das Beispiel mit dem Parkhaus: (Die Wahl ist relativ willkürlich, man hätte auch jede andere Aufgabe dieses Vortrags nehmen können.)

Ein Weg um das Parkhaus

Ein Parkhaus besitzt die Gestalt eines Zylinders. Es ist 25 m hoch und hat einen Durchmesser von 30 m.
Ein Zugangsweg soll in Form einer gleichmäßig ansteigenden Wendelstrecke rings um das Parkhaus geführt werden, so dass alle Parkdecks erreichbar sind. Damit er auch für Rollstuhlfahrer geeignet ist, darf er maximal 6% Steigung besitzen.

a) Plane einen möglichen Verlauf des Weges!
Wie lang wird er?

b) Erkläre deine Überlegungen deinem Nachbarn.
Diskutiert gemeinsam über euere Ergebnisse und arbeitet euere Resultate zu einer gemeinsamen Lösung aus.

c) Stellt euere Überlegungen und Ergebnisse im Klassenteam eueren Mitschülern vor.
Ordnet auch die Präsentationen der anderen Gruppen in euere Arbeit ein.

10. Variationsreichere Prüfungsaufgaben

Es bleiben offene, zu diskutierende Fragen, wie die skizzierten Anregungen zur Weiterentwicklung des Mathematikunterrichts auch in die Leistungsbewertung und die Gestaltung von Prüfungen Eingang finden können, denn im Zweifelsfall bestimmt das, was geprüft wird, das Lernen. Prüfungsaufgaben, die durch Reproduktion, schematisches Anwenden automatisierter Routinen und sinnentleertes Manipulieren formaler Symbole erfolgreich bestanden werden können, gefährden ein Unterrichtskonzept, das letztendlich „mathematical literacy" (wie es bei PISA heißt) zum Ziel hat.

Führen wir uns vor Augen, nach welchem Kriterium oftmals die Güte des Unterrichts beurteilt wird: Wenn von einer hinreichend großen Zahl von Schülern eine ausreichende Anzahl von Aufgaben bekannten Typs richtig gelöst wird, so gilt der Unterricht als erfolgreich. Viel zu selten wird gefragt bzw. überprüft, wie sinnvoll und stabil die Schüler die neuen Inhalte in ihr bisheriges Wissen eingebunden haben, wie souverän sie mit den neu erlernten Methoden, Begriffen und Regeln umgehen können und wie flexibel sie das Gelernte bei ungewohnten Problemstellungen nutzen können.

Auch bei Leistungserhebungen müssen deshalb der verständnisvolle Umgang mit Mathematik und der variable Einsatz der mathematischen Werkzeuge in einer Vielfalt von Kontexten mehr Gewicht erhalten.

11. Literatur

Baptist, P. (Hrsg.): Mathematikunterricht im Wandel, Bamberg 2000.

Baptist, P., Ulm, V. (Mod.): Mathematikunterricht verändern – Verständnis fördern, Praxis Schule 5 – 10, Westermann Verlag, Braunschweig, Heft 4/2002.

Gallin, P., Ruf, U.: Dialogisches Lernen in Sprache und Mathematik, Band 1 und 2, Kallmeyer, Seelze 1998.

Klippert, H.: Pädagogische Schulentwicklung, Weinheim Basel 2000.

Meyer, H.: Schulpädagogik, Band II, Berlin 1997.

Schupp, H.: Aufgabenvariation im Mathematikunterricht, Zentraler BLK-Modellversuch-Server, http://blk.mat.uni-bayreuth.de (Materialien zum Mathematikunterricht).

Wurz, L.: Unterrichtspraktische Überlegungen zu einer geometrischen Figur, Mathematik in der Schule 36, 1998.